

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS

Homología persistente

Malors Emilio Espinosa Lara

Índice general \dot{I}

Intro	ducción	1
Capít	ulo 1. Homología simplicial	3
1.	Introducción	3
2.	Definiciones básicas	3
3.	Construcciones fundamentales	7
4.	Espacios topológicos triangulables	10
5.	Homología simplicial	15
6.	Funciones inducidas	19
7.	Comentarios relevantes sobre la homología	22
8.	Notas y bibliografía	27
Capít	ulo 2. Homología persistente	31
1.	Filtraciones	31
2.	Homología persistente	32
3.	Persistencia: la historia de una clase	35
4.	Un ejemplo extenso	38
5.	Familias y generaciones	44
6.	Generaciones y persistencia	46
7.	El algoritmo de reducción	49
8.	Diagramas de persistencia	53
9.	Bibliografía	58
Bibliografía		61



Introducción

Estas notas son parte de un esfuerzo del Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) por estudiar el reciente desarrollo del área de análisis topológico de datos, donde la topología y la geometría, la probabilidad y la estadística, así como la computación se juntan para dar cabida a varios resultados que parecen ser prometedores, a pesar de la temprana edad en la que se encuentra el tema. El objetivo principal de las notas es hacer accesible el lenguaje topológico utilizado en la técnica básica del análisis topológico de datos: la homología persistente. Este tema se estudia mediante unos resúmenes de información, llamados diagramas de persistencia, a los cuales se les pueden hacer estudios estadísticos para obtener información relevante sobre lo que la forma de los datos representa. Es decir, al lograr representar un cúmulo de información, que puede provenir de muy distintas fuentes, como un conjunto de puntos en un espacio euclidiano se busca entender qué significan las cualidades topológicas, como son las componentes conexas o la cantidad y cualidad de los agujeros, que presenta dicho conjunto. Por supuesto, no hay una interpretación única de cada rasgo topológico y si es de interés o no para el estudio en cuestión depende de lo que se busque en cada caso.

Los diagramas de persistencia resumen la relación que tienen los agujeros de un objeto entre sí y la condensan como puntos en una gráfica de la cual puede leerse mucha información. Lo que es importante saber es que esos puntos marcados son colocados de acuerdo a las cualidades topológicas que se observan en el conjunto de datos, y que se adquieren mediante la computación de los números de Betti, que no son otra cosa que dimensiones de ciertos espacios vectoriales construidos a partir de la estructura que tiene el conjunto de puntos. Así pues, es primordial entender esta construcción, la homología, para entender qué codifican los diagramas de persistencia.

La homología es un tema muy amplio y aquí no tendremos oportunidad de revisarla toda, de hecho, nuestro estudio será muy superficial, encaminado a aplicarlo inmediatamente a la creación de los diagramas de persistencia. Sin embargo, la persona que lea con cuidado el primer capítulo de estas notas podrá entender bien la idea que pretende capturar la homología y se convencerá de que, en efecto, refleja la forma del objeto estudiado. Es importante recalcar que en el primer capítulo no aparecen las pruebas de la mayoría de los resultados enunciados, pues se da preferencia al desarrollo de la idea en lugar de a los tecnicismos del tema. Es recomendable leer otras fuentes para complementar las demostraciones, en caso de estar interesado en ellas.

El segundo capítulo intenta explicar de la manera más rigurosa posible la construcción de los diagramas de persistencia y sus propiedades básicas. Por lo tanto, a diferencia del primer capítulo, se presentan todas las demostraciones y varios cálculos específicos. La exposición sigue principalmente al libro *Computational Topology* de Herbert Edelsbrunner y John Harer y al libro *Topology for Computing* de Zomorodian. Es importante recalcar que las definiciones de independencia inicial y final, así como su equivalencia, y la definición de familia y generación las he dado yo y no aparecen explícitamente en ninguno de los textos que consulté. Introduje todas estas definiciones con el objetivo de formalizar la

2 INTRODUCCIÓN

prueba del teorema fundamental de la persistencia, que en el primer libro aparece con una justificación basada en inclusión y exclusión que, en efecto, refleja la idea detrás de la prueba pero nunca considera la necesidad de que las clases sean independientes de ninguna manera, dejando su definición de μ_{ij} muy vaga y, de interpretarse literalmente como se presenta allí, da como resultado un enunciado falso. El segundo libro no menciona el teorema explícitamente, y construye los diagramas de persistencia de otra forma (equivalente, por supuesto), más apegada a la idea de independencia que yo presento aquí.

Es importante enfatizar que estas notas no son exhaustivas y funcionan únicamente como una introducción al primer tema importante del área. Los estudios estadísticos en los diagramas de persistencia, los algoritmos óptimos para calcular los diagramas de persistencia u otras cualidades deseables, así como aplicaciones concretas no aparecen en la versión actual, pero los dos libros mencionados, así como una miriada de artículos disponibles en línea, dan muchísimo material para entender y disfrutar de este tema de tanta actualidad.

Finalmente, aprovecho aquí para agradecer al Dr. Víctor Pérez Abreu por invitarme a participar en este proyecto. También agradezco al CIMAT, pues es gracias a su apoyo académico y económico, así como su ambiente de ferviente intercambio de ideas, mediante seminarios, escuelas, veranos y cursos, los que hicieron posible la creación de las notas. No debo dejar de mencionar el apoyo que recibí de varios estudiantes que leyeron las notas y me dieron comentarios y correcciones que he intentado incluir en estas notas, en especial a Guillermo Elías Martínez Dibene, quien revisó muy cuidadosamente el escrito y aportó la gran parte de las mejoras que estas notas presentan ahora.

Malors Emilio Espinosa Lara Guanajuato, México 2015

Capítulo 1

Homología simplicial

1. Introducción

La homología es una herramienta esencial, no solo de la topología algebraica, sino de toda la matemática. Generalizaciones de la homología que nosotros estudiaremos se han llevado a cabo en diversas áreas de las matemáticas: geometría diferencial y algebraica, ecuaciones diferenciales, análisis armónico, e incluso hay un área del álgebra abstracta que se dedica al estudio axiomático de esta teoría, el álgebra homológica. Esta teoría tiene sus inicios en los trabajos de Poincaré a principios del siglo pasado y ha sido desde entonces que nuevos resultados se han demostrado y utilizado en diversas ocasiones. Aunque hay que decir que la idea de la homología ya estaba presente en muchos contextos antes de su introducción formal, como por ejemplo en los trabajos de geometría diferencial sobre la clasificación de superficies, o en varios resultados que arrojaban los cálculos de las fórmulas integrales de Cauchy.

La homología no es esencialmente difícil, pero es un paso de abstracción fuerte que todo matemático debe aprender. Lo que dificulta su aprendizaje es la gran cantidad de preliminares que hay que utilizar para lograr darle sustento a la idea intuitiva que pretende capturar: la forma de un objeto mediante sus agujeros y cómo se relacionan éstos. Sin embargo, como el objetivo de estas notas no es ser exhaustivo en este tema, pues ya hay bastantes referencias excelentes, sino mostrar una nueva aplicación de este tema al análisis topológico de datos, no pondremos las demostraciones a la mayoría de los resultados de este capítulo pero indicaremos en que libros pueden buscarse tales resultados. Cabe destacar que gran parte de la exposición que presentamos en este capítulo se ha basado en el libro Algebraic Topology de C.R.F. Maunder. Otra excelente referencia a este tema es el libro Homology Theory de Vick.

Finalmente, hay muchas clases de homología, pero nosotros utilizaremos la más simple, pues es esta la que se utiliza en el segundo capítulo. Dicha versión recibe el nombre de homología simplicial, y es posiblemente la más sencilla de entender, pero debido a la gran cantidad de hipótesis que requiere para construirse, se vuelve limitada rápidamente. Por ejemplo, ciertos teoremas que en otras versiones son más simples para esta versión se vuelven más tediosos de aplicar o demostrar. Lo mencionaremos después, pero posiblemente la versión más aceptada de la homología es la conocida como homología singular.

Por cierto, es importante decir que la homología tiene una construcción dual, la cohomología, que en ciertos casos es más poderosa por la manera en que estructura la información. En estas notas no tendremos oportunidad de estudiar este punto de vista, pero no por que no sea útil sino porque al nivel en que estudiaremos la persistencia no será necesario introducir la cohomología.

2. Definiciones básicas

En esta sección presentaremos las definiciones a partir de las cuales se construirá la teoría de homología. Como nuestro objetivo no es hacer un recuento de dicha teoría sino solo introducir cuáles son sus

ingredientes principales y cómo se utiliza habrá ciertos conceptos que en una exposición más centrada en el tema se verían pero que nosotros no pondremos. Así mismo, recordamos que no mostraremos las demostraciones de las proposiciones, más bien intentaremos concentrarnos en la parte geométrica de su contenido. Comenzamos con la siguiente:

DEFINICIÓN 1. Los puntos $a_0, a_1, ..., a_n$ en \mathbb{R}^m son independientes si los vectores $a_1 - a_0, a_2 - a_0, ..., a_n - a_0$ son linealmente independientes.

Observación 2. Un hecho importante es que la propiedad de n+1 puntos de ser independientes depende únicamente de los puntos y no del orden que se les haya dado, es decir, no depende de la elección de a_0 .

La importancia de esta definición radica en la siguiente

DEFINICIÓN 3. Sean $a_0, ..., a_n$ puntos independiente. El **simplejo** generado por dichos puntos es denotado por $a_0, ..., a_n > 0$ por $a_0, ...,$

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i$$

donde $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$. A los puntos $a_0, ..., a_n$ se les llama los **vértices** del simplejo y al número n su **dimensión**.

Observación 4. A un punto de la forma descrita en la definición se le llama combinación lineal convexa de los puntos $a_0, ..., a_n$. Así, el simplejo generado por n+1 puntos independientes consiste de las combinaciones lineales convexas de los mismos.

Cuando nos refiramos a un simplejo siempre querremos implicar que está formado de la forma descrita en la definición. Hemos hablado de la dimensión y de los vértices de un simplejo y la razón por la que estos conceptos están bien definidos es la siguiente

Proposición 5. Sea Δ un simplejo generado por $a_0, ..., a_n$. Si $b_0, ..., b_m$ son puntos independientes tales que $\Delta(b_0, ..., b_m) = \Delta(a_0, ..., a_n)$ entonces m = n y el conjunto $\{b_0, ..., b_m\}$ es un reordenamiento de $\{a_0, ..., a_n\}$.

Un simplejo es un subconjunto de \mathbb{R}^m para algún m y adquiere una topología como subespacio del mismo. Además la topología obtenida así es exactamente la misma que la inducida al restringir la métrica de \mathbb{R}^m al simplejo. Tenemos la siguiente:

Proposición 6. Un simplejo es un subconjunto compacto, conexo y convexo del espacio euclideano que lo contiene.

Observación 7. Es importante entender lo que estas propiedades nos dicen del simplejo como figura geométrica por sí sola y no tanto como subconjunto de un espacio euclidiano, por lo que mencionamos un poco la idea detrás de la prueba. La compacidad nos está diciendo que toda sucesión en el simplejo tiene una subsucesión convergente, y eso no debería sorprendernos por la forma que tienen los puntos del simplejo. Digamos que la sucesión está dada por puntos

$$p_k = \sum_{i=0}^n \lambda_k^i e_i,$$

para algunos λ_k^i , k=1,2,3,... y~i=0,...,n. Por lo tanto, como $\lambda_1^1,\lambda_2^1,\lambda_3^1...$ es una sucesión en [0,1] se tiene, por el teorema de Borel-Lebesgue, que hay una subsucesión que converge, digamos $\lambda_{n_1}^1,\lambda_{n_2}^1,...$ Fijándonos ahora en la sucesión $\lambda_{n_1}^2,\lambda_{n_2}^2,...$ concluiremos, por el mismo argumento, que habrá una subsucesión que converge. Repitiendo este argumento una y otra vez, llegaremos a que existe una sucesión de enteros positivos $n_1 < n_2 < n_3 < ...,$ tal que $\lim_{k\to\infty} \lambda_{n_k}^j = \lambda^j \in [0,1]$ con j=0,1,...,n-1. Finalmente, como para cada k se cumple que

$$\lambda_{n_k}^n = 1 - \lambda_{n_k}^0 - \dots - \lambda_{n_k}^{n-1},$$

al sacar límite obtenemos que

$$\lambda^n = \lim_{k \to \infty} \lambda_{n_k}^n = 1 - \lambda^0 - \dots - \lambda^{n-1},$$

mostrando que existe tal sucesión convergente. La esencia de este argumento radica en que dado un punto

$$p = \sum_{i=0}^{n} \lambda^{i} e_{i},$$

los coeficientes $(\lambda^0,...,\lambda^n)$ pueden pensarse como una especie de coordenadas (que suelen llamarse coordenadas baricéntricas) y que, por lo que acabamos de mencionar, funcionan bien con los límites, en el sentido de que si una sucesión convergente de puntos tiene coordenadas baricéntricas $(\lambda^0_k,...\lambda^n_k)$ su límite tiene coordenadas baricéntricas dadas al obtener el límite en cada entrada. Esto es precisamente lo que ocurre con puntos en \mathbb{R}^n y es bueno saber que puede generalizarse con cuidado a estos simplejos.

Que sea conexo dice precisamente que consiste de un solo bloque, y es inmediato pues por la manera en que está definido un simplejo, el segmento que los une está contenido en el simplejo. Para ver esto basta tomar la combinación lineal, por ejemplo en coordenadas baricéntricas,

$$t(\lambda_0, ..., \lambda_n) + (1-t)(\lambda'_0, ..., \lambda'_n),$$

y se cumple que siguen siendo coordenadas baricéntricas de algún punto, pues

(1)
$$\sum_{k=0}^{n} ((t\lambda_k) + (1-t)\lambda_k') = t \sum_{k=0}^{n} \lambda_k + (1-t) \sum_{k=0}^{n} \lambda_k' = t + 1 - t = 0.$$

En resumen, existen unas coordenadas para trabajar en los simplejos, que funcionan de manera natural para hacer combinaciones convexas y para obtener límites, por lo que en ocasiones identificaremos al punto $p = \sum_{i=0}^{n} \lambda^{i} e_{i}$ con la coordenada $(\lambda^{0}, ..., \lambda^{n})$.

Ahora que hemos definido los bloques con los que construiremos la teoría pasamos a definir las funciones que preservan su estructura.

DEFINICIÓN 8. Sean $\Delta(a_0,...,a_n)$ y $\Delta(b_0,...,b_m)$, simplejos, no necesariamente de la misma dimensión ni contenidos en el mismo espacio euclideano. Una función

$$f: \Delta(a_0, ..., a_n) \to \Delta(b_0, ..., b_m),$$

es una función simplicial si

- 1. Preserva vértices, es decir, para cada $i = 0, ..., n, f(a_i) \in \{b_0, ..., b_m\},\$
- 2. Preserva combinaciones lineales, es decir,

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i).$$

- Observación 9. 1. Note que la asignación de vértices puede no ser inyectiva, por lo que la combinación lineal obtenida puede tener vértices repetidos. Esto no es un problema pues se mantiene siendo una combinación lineal convexa pues, a pesar de que se reagrupan los coeficientes siguen sumando 1 y siendo no negativos (obviamente, a los vértices que no aparecen les corresponde el coeficiente 0).
- 2. Observe que una función simplicial no necesariamente preserva coordenadas homogéneas, precisamente por el hecho de que la cantidad u orden de los vértices puede cambiar. Sin embargo, es posible escribir una función simplicial en coordenadas baricéntricas, siguiendo la misma idea para escribir una transformación lineal respecto a bases, o transformaciones proyectivas respecto a coordenadas homogéneas.

Para ejemplificar lo anterior consideremos los simplejos $\Delta_1 = \Delta(e_0, e_1)$ y $\Delta_2 = \Delta(e_0, e_1, e_2)$ y las funciones simpliciales $c_i : \Delta_1 \to \Delta_2, i = 0, 1, 2$, dados por

$$c_0(x) = (1 - x)e_1 + xe_2,$$

$$c_1(x) = (1 - x)e_0 + xe_2,$$

$$c_2(x) = (1 - x)e_0 + xe_1.$$

Sus representaciones en coordenadas baricéntricas son:

$$c_0(x, y) = (0, x, y),$$

 $c_1(x, y) = (x, 0, y),$
 $c_2(x, y) = (x, y, 0).$

Estas son todas las funciones simpliciales $c:\Delta_1\to\Delta_2$ pues lo que hacen tales funciones es parametrizar el segmento que une dos vértices en Δ_2 . Una vez que se han escogido la imagen del 0 y del 1 bajo c, solo hay una manera de extender la función para que sea simplicial: extendiendo linealmente. De este último comentario y de la definición anterior es clara la siguiente

Proposición 10. Sean $\Delta(a_0,...,a_n)$ y $\Delta(b_0,...,b_m)$, simplejos, no necesariamente de la misma dimensión ni contenidos en el mismo espacio euclidiano. Dada una función

$$A: \{a_0, ..., a_n\} \to \{b_0, ..., b_m\},\$$

existe una única función simplicial

$$f: \Delta(a_0, ..., a_n) \to \Delta(b_0, ..., b_m),$$

que extiende a A. Dicha función se obtiene de extender A linealmente.

Las propiedades fundamentales de las funciones simpliciales están dadas en la siguiente

Proposición 11. Una función simplicial f es continua y cerrada. Más aún se tiene que

- 1. si la asignación de vértices es inyectiva, entonces f es un encaje;
- 2. si la asignación de vértices es suprayectiva, entonces f es un cociente;
- 3. si la asignación de vértices es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

En cada uno de estos casos se suele llamar a f, respectivamente, encaje lineal, cociente lineal y homeomorfismo lineal.

Observación 12. La razón de ser de esta proposición es clara si se piensa en coordenadas baricéntricas. Si la asignación de vértices es inyectiva, entonces el único efecto que tiene f sobre las coordenadas baricéntricas es agregar ceros, correspondientes a los vértices que quizá no se utilizaron. Esto indica que f sólo identifica al simplejo dominio con una de las caras del simplejo imagen y, más aún, preserva la topología en su imagen pues se puede dar la función inversa que también será simplicial.

En cambio, si la asignación es suprayectiva, entonces la coordenada homogénea que corresponde al vértice imagen v de varios vértices $v_1, ..., v_s$ del dominio es la suma de las coordenadas homogéneas de $v_1, ..., v_s$. Por eso es un cociente, pues lo que identifica tal función es toda la cara formada por $v_1, ..., v_s$ en un punto.

Tenemos inmediatamente el importante

COROLARIO 13. Dos simplejos de la misma dimensión son homeomorfos.

Debido a este corolario es de esperarse que hubiera un modelo estándar de un simplejo de dimensión n y en efecto lo hay. Más precisamente tenemos la siguiente

DEFINICIÓN 14. Sea n un entero no negativo. El simplejo estándar de dimensión n es

$$\Delta_n := \Delta(e_0, e_1, ..., e_n)$$

donde $e_0 = 0$ y $e_1, ..., e_n$ es la base estándar de \mathbb{R}^n .

Podemos pensar geométricamente a los simplejos como deformaciones de los simplejos estándar.

3. Construcciones fundamentales

Para poder entender a los objetos que nos interesa construir primero necesitamos entender ciertas relaciones entre distintos simplejos. La relación fundamental es la siguiente:

DEFINICIÓN 15. Sean τ y σ dos simplejos en el mismo espacio euclidiano. Decimos que τ es una cara de σ , o que τ es un subsimplejo de σ si todos los vértices de τ son vértices de σ . Si τ es de dimensión n decimos que τ es una cara de dimensión n de σ o que τ es una 1-cara de σ . Denotaremos esta relación por $\tau \leq \sigma$ y pondremos $\tau < \sigma$ si sabemos que τ está estrictamente contenido en σ .

Note que $\mathfrak{K} \leq \mathfrak{K}$ para cualquier simplejo \mathfrak{K} . Los objetos que nos interesan se forman a partir de simplejos como indica la siguiente

DEFINICIÓN 16. Un complejo simplicial es un conjunto finito \mathfrak{K} de simplejos simpliciales en \mathbb{R}^n tales que:

- 1. Si $\tau \leq \sigma$ y $\sigma \in \Re$ entonces $\tau \in \Re$,
- 2. $Si \tau, \sigma \in \mathfrak{K}$ entonces $\tau \cap \sigma$ es una cara de σ y de τ .

A la dimensión más alta de los simplejos contenidos en \Re se le llama la dimensión de \Re . En muchas ocasiones a un complejo simplicial lo llamaremos simplemente complejo.

Observación 17. De manera menos formal, un complejo simplicial puede pensarse como un objeto que se forma a partir de simplejos que se pegan, pero tal pegado debe hacerse únicamente mediante caras que embonan perfectamente.

Asociado a cada complejo existe un conjunto de puntos en el espacio euclideano que los contiene que es muy importane. Su definición precisa es:

DEFINICIÓN 18. Sea \mathfrak{K} un complejo simplicial. Definimos su **poliedro asociado** $|\mathfrak{K}|$ como el conjunto de puntos en \mathbb{R}^n que pertenecen a al menos un simplejo de \mathfrak{K} , es decir,

$$\mid \mathfrak{K} \mid = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{K}} \sigma.$$

Observación 19. Podría parecer pedante que distingamos un complejo simplicial de su poliedro, pero esta distinción es imprescindible. A lo largo de las siguientes secciones veremos por qué esta distinción es tan importante pero cabe decir que un poliedro es un subconjunto de puntos en \mathbb{R}^n que no tiene por qué tener dada una división como simplejos, o mucho peor, en caso de tener una posiblemente tendrá infinitas. En tal caso es importante saber cuáles propiedades dependen de la división en simplejos y cuáles sólo dependen del conjunto de puntos.

De la misma manera que con los simplejos, el poliedro asociado a un complejo adquiere una topología del espacio ambiente que lo contiene, pero ya mencionamos que dada una dimensión todos los simplejos de tal dimensión son homeomorfos por lo que la topología realmente no depende del espacio ambiente. El resultado análogo para poliedros es la siguiente

PROPOSICIÓN 20. Sea \Re un complejo simplicial. Un subconjunto $C \subset |\Re|$ es cerrado si y sólo si $C \cap \sigma$ es cerrado en σ para todo $\sigma \in \Re$. En particular, como la topología de los simplejos es independiente de \mathbb{R}^n , la propiedad de ser cerrado depende únicamente de \Re y no de su espacio ambiente.

Observación 21. Esta proposición requiere algunos comentarios para entender qué está indicando. No intentamos ser muy rigurosos, sino que intentamos explicar porque es esencial esta proposición.

- Para empezar, un poliedro es una unión finita de simplejos y como los simplejos son conjuntos compactos de Rⁿ se sigue que | ℜ | es un subconjunto compacto del espacio que lo contiene. En particular, un poliedro es cerrado en el espacio que lo contiene y por lo tanto, para un subconjunto C ⊂ | ℜ | el ser cerrado en la topología del subespacio y el ser cerrado en el espacio ambiente coinciden.
- 2. Dados dos espacios topológicos X,Y y una función continua f : A ⊂ X → Y existe una manera de pegar a X con Y mediante la función f. Lo que se hace es considerar la unión disjunta de ambos espacios y luego hacer cociente, identificando en ese espacio, a los puntos x ∈ A con f(x) ∈ Y. Esta manera de construir espacios topológicos corresponde a la idea de unir objetos distintos al pegar parte del primero sobre cierta parte del segundo y dejar intacto el resto.
- 3. El hecho de que todos los simplejos de la misma dimensión sean homeomorfos indica que estos objetos traen una topología canónica y podríamos intentar pegar dos de ellos, mediante alguna cara, con el proceso descrito en el punto anterior. Por lo tanto, al hacer una unión de estos objetos, al pegarlos a lo largo de su caras, nos permite imponer una topología en el objeto obtenido que no viene de ningún espacio ambiente sino de la topología que las caras ya traen con ellas. En otras palabras, dado el simplejo ya hay una manera de decidir qué colecciones de puntos serán cerradas de acuerdo a como se descomponen como pedazos de los distintos simplejos.

4. Así que un complejo dado genera dos espacios topológicos distintos: el poliedro | \mathbb{K} | y el que se obtiene, de forma abstracta, pegando como se indica en el segundo punto una y otra vez hasta embonar todos los simplejos. Lo que esta proposición nos está diciendo es que estos dos objetos son homeomorfos, pues precisamente que un subconjunto sea cerrado en | \mathbb{K} | es equivalente a que este formado de pedazos cerrados en la topología inherente a cada simplejo.

No entraremos en más detalle, pero hay una manera de trabajar con la topología de estos poliedros que ignora por completo como están los simplejos encajados en el espacio ambiente y sólo se fija en como están pegados los simplejos entre sí (la manera se basa específicamente en el punto dos anterior). La proposición implica que la información topológica que se obtiene no depende del complejo y es una característica del poliedro, sin importar en cuál espacio ambiente esté metido, tal como ocurría con los simplejos.

Un poliedro puede descomponerse en simplejos, por definición, pero hay otras maneras en que puede descomponerse. Una de ellas es muy importante y la abordamos a continuación:

DEFINICIÓN 22. Sean $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ dos complejos. Decimos que \mathfrak{K} es un **subcomplejo simplicial**, o simplemente, **subcomplejo** de \mathfrak{L} si $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}$.

La proposición 20 anterior implica inmediatamente la siguiente

Proposición 23. Sean $\mathfrak K$ un subcomplejo de $\mathfrak L$, entonces $|\mathfrak K|$ es un subconjunto cerrado de $|\mathfrak L|$.

La proposición esencial para la descomposición que hemos prometido es

Proposición 24. Sea & un complejo. El subconjunto

$$\mathfrak{K}_j = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{K} \dim \sigma \le j} \{\sigma\},\,$$

es un subcomplejo de A.

DEFINICIÓN 25. Sea \mathfrak{K} un complejo. El subcomplejo \mathfrak{K}_j , $j=0,1,...,\dim\mathfrak{K}$, se conoce como j-esqueleto de \mathfrak{K} .

Observación 26. Notemos que

$$\mathfrak{K} = \bigcup_{j=0}^{\dim \mathfrak{K}} \mathfrak{K}_j,$$

y que además $\mathfrak{K}_0 \subset ... \subset \mathfrak{K}_{\dim \mathfrak{K}}$. En particular,

$$\mid \mathfrak{K}_0 \mid \subset ... \subset \mid \mathfrak{K}_{\dim \mathfrak{K}} \mid$$

es una exhausción por compactos de | \mathbb{R}|.

Otra consecuencia sencilla de la proposición 20 es la siguiente

PROPOSICIÓN 27. Sea \Re un complejo simplicial. Un subconjunto $C \subset |\Re|$ es cerrado si y sólo si $C \cap |\Re_j|$ es cerrado en $|\Re_j|$ para todo $j = 0, 1, ..., \dim \Re$.

Finalmente, debemos atender el concepto de función entre complejos. Realmente no se consideran funciones definidas en los complejos sino en sus poliedros, pues son estos los que son subconjuntos de espacios euclidianos. Lo que se hace es definir el concepto localmente, utilizando el hecho de que los poliedros están formados por simplejos, donde el concepto de función simplicial ya está dado.

DEFINICIÓN 28. Sean $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ dos complejos, $f: |\mathfrak{K}| \to |\mathfrak{L}|$ una función entre ellos y sea $\tau \in \mathfrak{K}$. Diremos que f es simplicial en τ si existe $\sigma \in \mathfrak{L}$ tal que:

- 1. $f(\tau) \subset \sigma$,
- 2. $f|_{\tau} : \tau \to \sigma$ es simplicial.

Diremos que f es simplicial si es simplicial en τ para todo $\tau \in \mathfrak{K}$.

- Observación 29. 1. Dado un $\tau \in \mathfrak{K}$ pueden existir varios $\sigma \in \mathfrak{L}$ que cumplan que $f(\tau) \subset \sigma$, pero esto no presenta ningún problema pues siempre hay uno menor, a saber la intersección de todos los σ con tal propiedad, y basta verificar que sea simplicial al restringir el codominio allí.
- 2. Nuevamente, una función simplicial envía simplejos generados por vértices del complejo a la cara generada por las imágenes, pero no necesariamente será de la misma dimensión.

La siguiente proposición da una especie de converso a la afirmación anterior:

PROPOSICIÓN 30. Sean $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ dos complejos y supongamos que para cada $\tau \in \mathfrak{K}$ está dada una función simplicial $f_{\tau}: \tau \to \sigma$, para algún $\sigma \in \mathfrak{K}$. Si se cumple que $\eta \leq \tau$ implica que $f_{\tau} \mid_{\eta} = f_{\eta}$, entonces existe una única función simplicial $f: \mid \mathfrak{K} \mid_{\to} \mid \mathfrak{L} \mid$ tal que $f \mid_{\tau} = f_{\tau}$ para todo $\tau \in \mathfrak{K}$.

Observación 31. Gracias a esta proposición sabemos que las funciones simpliciales son precisamente aquellas que se obtienen de pegar funciones simpliciales en simplejos. Aunque nosotros no iremos en esa dirección, hay teoremas importantes sobre homología y funciones inducidas, conceptos que definiremos más adelante, que se basan en la capacidad de descomponer poliedros en subpoliedros que se entiendan mejor y hacer lo análogo con funciones simpliciales.

Finalmente, tenemos la siguiente

Proposición 32. Una función simplicial f es continua y cerrada. Más aún se tiene que

- 1. si f es inyectiva, entonces f es un encaje;
- 2. $si\ f\ es\ suprayectiva,\ entonces\ f\ es\ un\ cociente;$
- 3. $si\ f\ es\ biyectiva,\ entonces\ f\ es\ un\ homeomorfismo.$

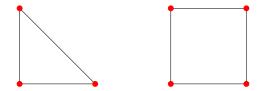
En cada uno de estos casos se suele llamar a f, respectivamente, encaje lineal, cociente lineal y homeomorfismo lineal.

4. Espacios topológicos triangulables

No todos los espacios topológicos son homeomorfos a poliedros y eso evita que podamos hablar de muchos espacios de la misma manera que hemos hecho hasta ahora. Como queremos insistir en aplicar nuestros métodos a espacios más generales tiene sentido que demos la siguiente:

Definición 33. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **triangulable** si existe un complejo simplicial \mathfrak{K} y un homeomorfismo $h: |\mathfrak{K}| \to X$. Decimos que (\mathfrak{K}, h) es una **triangulación** de X.

Si un espacio X tiene dos triangulaciones (\mathfrak{K}_1, h_1) y (\mathfrak{K}_2, h_2) , es claro que $|\mathfrak{K}_1|$ y $|\mathfrak{K}_2|$ son homeomorfos. Sin embargo, eso no quiere decir que sean linealmente homeomorfos. De hecho, por lo general no lo son, pues tendrán distinta cantidad de vértices, aristas, caras, etc... Un ejemplo de esto ya puede verse desde el círculo: si $X = \mathbb{S}^1$, distintas triangulaciones de X están dadas por diversos polígonos, como puede verse en el siguiente dibujo.



Este hecho nos lleva a hacernos las siguientes preguntas:

- 1. ¿Es posible triangular todo espacio topológico X?
- 2. ¿Es posible comparar dos triangulaciones del mismo espacio X de alguna forma?
- 3. ¿Qué propiedades dependen únicamente de X y no de su triangulación?

Estos temas son fundamentales así que dedicaremos nuestra atención a cada uno de ellos momentaneamente.

4.1. ¿ Es posible triangular todo espacio topológico X? Sea $\mathfrak R$ un complejo simplicial. En la sección anterior mencionamos que la topología de $|\mathfrak R|$ puede entenderse como la topología del subespacio que obtiene de $\mathbb R^n$, y por lo tanto una manera de atacar esta pregunta es buscar propiedades que se hereden de $\mathbb R^n$. Una tal propiedad es ser Hausdorff; recordemos que una espacio topológico X es Hausdorff si dados dos puntos distintos $p, q \in X$ existen abiertos disjuntos U, V tales que $p \in U, q \in V$. Como todo poliedro es subespacio de un espacio euclidiano, tendrá que ser Hausdorff, de donde cualquier espacio que no cumpla tal propiedad no será triangulable.

Un conjunto grande de ejemplos de espacios topologícos que no son Hausdorff y que son muy importantes son las variedades algebraicas. No entraremos en muchos detalles sobre este tema pero platicaremos rápidamente un ejemplo:

DEFINICIÓN 34. Sean $f_1, ..., f_n \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_m]$ polinomios. Definamos el conjunto algebraico generado por $f_1, ..., f_n$ como

$$V(f_1, ..., f_n) = \{ p \in \mathbb{C}^m \mid f_i(p) = 0 \}.$$

Observación 35. Los conjuntos algebraicos son precisamente los ceros comunes de polinomios. Por ejemplo, en $\mathbb C$ basta preocuparse por conjuntos algebraicos asociados a únicamente un polinomio, pues puede sustituirse al conjunto $f_1, ..., f_n$ por su máximo común divisor. Sabemos que todo polinomio tiene una cantidad finita de raíces, de donde los conjuntos algebraicos en $\mathbb C$ son precisamente sus subconjuntos finitos, junto con $\mathbb C$ mismo (asociado al polinomio 0).

Resulta ser que los conjuntos algebraicos satisfacen las propiedades de ser cerrados de una topología, es decir, se tiene la siguiente

Proposición 36. Se cumple que

- 1. \emptyset $y \mathbb{C}^m$ son conjuntos algebraicos.
- 2. Intersección arbitraria de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico.
- 3. Unión finita de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico.

Gracias a esta definición tenemos que puede definirse una topología en \mathbb{C}^m :

DEFINICIÓN 37. La topología obtenida en \mathbb{C}^m , al declarar a los conjuntos algebraicos como cerrados, se conoce como la topología de Zariski.

Esta es la topología que se utiliza en la geometría algebraica y es de suma importancia.

Proposición 38. La topología de Zariski en \mathbb{C}^m no es Hausdorff.

Observación 39. Por ejemplo, en $\mathbb C$ los abiertos no vacíos son los complementos de conjuntos finitos y claramente cualesquiera dos de ellos se intersectan en una infinidad de puntos. De allí se sique que en $\mathbb C$ esta topología no es Hausdorff.

Con esto hemos visto que hay espacios topológicos que no son Hausdorff y que aparecen de manera natural y que, de hecho, resultan ser muy importantes. Claramente estos espacios no son homeomorfos a un poliedro. Con esto no queremos implicar que las triangulaciones no se utilizen en la geometría algebraica, si se utilizan, pero dan una definición alternativa. En vez de insistir con la definición de triangulación directamente, se buscan propiedades que tienen los espacios triangulables y se generalizan estas propiedades. Sólo por mencionarlo, a modo de ejemplo ya que utilizamos el tema, eso es lo que se hace para utilizar las consecuencias de que un espacio sea Hausdorff, a pesar de que la topología de Zariski no lo es.

Sin embargo, tendremos que aceptar que buscar contraejemplos de esta forma es insatisfactorio, pues quisieramos saber si hay ejemplos de objetos no triangulables pero que si cumplan las propiedades que cualquier conjunto de \mathbb{R}^n adquiriría del espacio ambiente. La respuesta a esta pregunta ha sido muy importante, pues en efecto, hay una familia de espacios topológicos muy agradables para trabajar y que siempre pueden encontrarse dentro de \mathbb{R}^n . Los espacios de los que hablamos se llaman variedades topológicas y miembros de esta categoría son las esferas, toros, espacios proyectivos, las grassmanianas, subgrupos de matrices, etc.

La definición es algo técnica, así que mejor nos concentramos en la idea esencial de las variedades topológicas. Un espacio topológico M será una variedad topológica si localmente es homeomorfa a \mathbb{R}^n , para un n fijo a lo largo de M. Hay que pedir que sea Hausdorff y segundo contable, pero estos son detalles técnicos para ciertos teoremas importantes, pero lo esencial es lo localmente euclidiano. Como ya mencionamos, muchos espacios conocidos tienen esta estructura y la gran mayoría de ellos se sabe que son triangulables. Por ejemplo, las esferas, los toros o los espacios proyectivos son todos triangulables. Eso nos lleva a la siguiente

Conjetura 40. Toda variedad topológica admite una triangulación.

Si no se ha trabajado mucho con estas estructuras quizá lo siguiente no parezca sorprendente, pero ya una vez conocidos estos objetos, que tienen suficiente estructura para trabajar con ellos, es sorprendente que la respuesta a la conjetura es no. Esto nos debe llevar a pensar que pedir que un espacio topológico sea triangulable es pedir demasiado, de hecho, precisamente por eso esta definición se ha modificado en muchos aspectos y ha dado cabida a otro tipo de espacios (por ejemplo, los complejos CW) donde varias de las hipótesis de una triangulación se relajan. Contraejemplos a esta conjetura aparecen a partir de dimensión cinco.

También hay que dar resultados positivos. Una familia donde las triangulaciones si son posibles se obtiene al pedir aún más a las variedades topológicas. Tenemos

Proposición 41. Toda variedad diferenciable es triangulable.

Observación 42. Recordemos que una variedad topológica es diferenciable si localmente es difeomorfa a \mathbb{R}^n . Definir concretamente como definir difeomorfismo es delicado, pues el concepto de homeomorfismo ya está dado en cualquier espacio topológico. Sin embargo, el concepto de difeomorfo requiere tener la capacidad de derivar en algún sentido y eso no se pide en una variedad topológica, así que se tiene que agregar una estructura extra que se encargue de definir cuales son las funciones que serán diferenciables.

No ahondaremos más en esta parte, pero esperemos haya quedado claro que pedir que un espacio sea triangulable si es pedir bastante de ella.

4.2. ¿Es posible comparar dos triangulaciones del mismo espacio X de alguna forma? Ahora supongamos que X ya es triangulable, es decir, existe un complejo simplicial \mathfrak{K} y un homeomorfismo $h: |\mathfrak{K}| \to X$. Debería ser claro que, salvo que X sea una colección finita de puntos, siempre podremos encontrar más triangulaciones a partir de la que ya tenemos \mathfrak{K} . Como es de interés definir propiedades utilizando la triangulación, es importante que dadas distintas triangulaciones los conceptos que se definan utilizándolas coincidan, o al menos, sus diferencias puedan controlarse.

La idea usual es dividir los simplejos de un complejo en otros, de tal manera que el poliedro asociado no cambie. Ahora describiremos la manera estándar de hacer esto:

Definición 43. Sea $\mathfrak{S} = \Delta(v_0, ..., v_n)$ un simplejo. El baricentro de \mathfrak{S} se define como el punto

$$\dot{\mathfrak{S}} = \frac{v_0 + \dots + v_n}{n+1}.$$

Observación 44. Notemos que las coordenadas baricéntricas del baricentro son

$$\left(\frac{1}{n+1},...,\frac{1}{n+1}\right)$$
.

Hay una subdivisión muy natural que se obtiene al agregar los baricentros de todas las caras de S. Describirla más formalmente es un poco técnico pero se basa en la próxima

Proposición 45. Sea \mathfrak{S} un simplejo y sean $\sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq ... \leq \sigma_k$ caras de \mathfrak{S} . Se cumplen

- los baricentros $\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_k$ son linealmente independientes y generan un simplejo de dimensión k que denotaremos F(s), donde por s nos referiremos a la sucesión de simplejos $\sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq ... \leq \sigma_k$,
- el conjunto

$$\mathfrak{S}' = \bigcup \{F(s)\},\,$$

donde la unión se lleva a cabo sobre todas las posibles sucesiones s de caras de \mathfrak{S} , es un complejo simplicial.

• los poliedros |S| y |S'| coinciden, es decir, |S'| = |S|.

Utilizando esta proposición tiene sentido el siguiente

Teorema 46. Sea & un complejo y definamos

$$\mathfrak{K}' = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{K}} \bigcup_{\tau \in \sigma'} \{\tau\}.$$

Entonces \mathfrak{K}' es un complejo simplicial $y \mid \mathfrak{K}' \mid = \mid \mathfrak{K} \mid$.

DEFINICIÓN 47. Sea \Re un complejo dado. El complejo \Re' construido en el teorema anterior se llama subdivisión baricéntrica de \Re y al proceso de obtenerlo se le conoce como el proceso de subdivisión baricéntrica.

Observación 48. Nada evita que sigamos haciendo subdivisiones baricéntricas una y otra vez, y de hecho es muy importante hacerlo para la demostración de resultados esenciales para la homología. Cuando hemos efectuado la división baricéntrica k veces, al complejo obtenido se le llama la k-ésima subdivisión baricéntrica de \Re y se le denota por $\Re^{(k)}$. Nótese que $|\Re^{(k)}| = |\Re|$.

Pretendemos comparar dos triangulaciones distintas mediante subdivisiones baricéntricas sucesivas. Esta no es la única manera de subdividir, pero cualquier otra propiedad que pudieramos obtener mediante otro proceso podrá también obtenerse mediante esta subdivisión. Esto debería enunciarse con más cuidado que el aquí mostrado, pero nos contentaremos con restringirnos a este proceso. Tenemos la siguiente

DEFINICIÓN 49. Sean (\mathfrak{K}_1, h_1) y (\mathfrak{K}_2, h_2) dos triangulaciones de X. Decimos que son **combinatorialmente equivalentes** si existe una tercera triangulación de X, (\mathfrak{K}_3, h_3) tal que \mathfrak{K}_3 es una subdivisión baricéntrica tanto de \mathfrak{K}_1 como de \mathfrak{K}_2 .

Una conjetura muy famosa e importante, conocida como la conjetura principal (o Hauptvermutung), es

Conjetura 50. Cualesquier dos triangulaciones del mismo espacio son combinatorialmente equivalentes.

Lamentablemente esta conjetura es falsa, como demostró John Milnor en 1961. Por lo tanto, lo que se intenta hacer después de esta realidad es buscar colecciones de espacios donde quizá si sea cierta o bien, redefinir el concepto de triangulación para que se vuelva verdadera. Increiblemente, esta conjetura y variaciones de ella se mantienen siendo falsas incluso para espacios decentes a partir de ciertas dimensiones.

4.3. ¿Qué propiedades dependen únicamente de X y no de su triangulación? Derrotados de semejante manera solo nos queda preguntarnos: ¿Hay algo que podamos salvar y que no dependa de las triangulaciones? La respuesta, por suerte, es que sí. Demos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 51. Sea \Re un complejo simplicial de dimensión n, y para cada m sea Σ_m la cantidad de caras de \Re de dimensión m. La característica de Euler de \Re se define como

$$\chi(\mathfrak{K}) = \Sigma_0 - \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3 + \dots + (-1)^m \Sigma_m.$$

Si X es un espacio triangulable $y(\mathfrak{K},h)$ es una triangulación, definimos la característica de Euler de X, respecto $a(\mathfrak{K},h)$, como

$$\chi(X) = \chi(\mathfrak{K}).$$

La definición de la característica de Euler, como está definida aquí, depende de la triangulación. Por suerte tenemos el siguiente

TEOREMA 52. La característica de Euler es invariante combinatorio, es decir, no depende de la triangulación. En otras palabras, si (\mathfrak{K}_1, h_1) y (\mathfrak{K}_2, h_2) son dos triangulaciones de X, entonces

$$\chi(\mathfrak{K}_1) = \chi(\mathfrak{K}_2).$$

Observación 53. 1. Observe que este teorema no necesita que las triangulaciones sean combinatorialmente equivalentes y eso es lo que la hace realmente importante. La razón detrás de esta victoria, que ignora el problema de las subdivisiones, es que la característica de Euler puede definirse de una manera totalmente distinta que no requiere de alguna triangulación.

La característica de Euler es un número importante que aparece una y otra vez en muchos contextos y de maneras sumamente diversas: ecuaciones diferenciales, topología diferencial, geometría diferencial, topología algebraica, geometrá algebraica, etc. Lamentablemente aquí no tendremos oportunidad de estudiar tales apariciones.

5. Homología simplicial

En esta sección definiremos finalmente la herramienta principal para nuestro estudio: los grupos de homología. Para comenzar supondremos que tenemos un complejo simplicial finito $\mathfrak K$ de dimensión n. El objetivo de la homología es cuantificar de manera algebraica cuál es la forma de $\mathfrak K$, es decir, la manera en que los diversos agujeros del complejo están distribuidos en $\mathfrak K$ y como se relacionan entre sí. La idea esencial es observar que simplejos son frontera de otros, una idea que desarrollaremos a lo largo de la sección y que intentaremos volver clara e intuitiva.

El primer paso es definir los objetos algebraicos con los que trabajaremos:

DEFINICIÓN 54. Para cada $0 \le m \le n$ definimos el **grupo de** m- cadenas como el espacio vectorial libre sobre \mathbb{Z}_2 generado por las caras de dimensión m de \mathfrak{K} . A este grupo libre lo denotamos por $C_m(\mathfrak{K})$.

Observación 55. • Por definición, una m-cadena es una suma formal de la forma

$$a_1\sigma_1 + \ldots + a_n\sigma_n$$
,

con $a_1,...,a_n$ elementos de \mathbb{Z}_2 y $\sigma_1,...,\sigma_n$ caras de dimensión m de \mathfrak{K} .

■ Si m no está en el rango 0,...,n definimos $C_m(\mathfrak{K}) = \{0\}$. Esto es consistente con la definición pues no hay caras de tal dimensión.

Como los coeficientes sobre los que se trabaja la homología son 0 o 1 siempre podemos pensar a una m-cadena como el conjunto de caras que aparecen como sumandos. Esta interpretación es importante pues permite ver geométricamente los elementos de $C_m(\mathfrak{K})$ y volverá más evidentes varias de las definiciones que daremos después. De hecho, aprovecharemos esto para mostrar algunos ejemplos que motivarán las definiciones. No seremos demasiado formales en esta parte pues sólo queremos motivar las definiciones.

¿Cómo detectamos los agujeros de un complejo? Analicemos el siguiente ejemplo sencillo: Sea \mathfrak{K} el complejo obtenido de Δ_3 al remover la única cara 3-dimensional. Este complejo es una pirámide hueca y todos estaremos de acuerdo en que tiene un agujero. Pretendemos encontrar dos cosas ahora: Determinar su dimensión como agujero y encontrar qué características intrínsecas del objeto determinan su existencia. Para entender la primera cuestión notemos que si dibujamos cualquier lazo sobre la pirámide siempre podremos contraerlo a un punto, es decir, existe superficie de la pirámide por la cual puede viajar este lazo para volverse un punto.

De cierta manera esto debería decirnos que este agujero no es de dimensión 1, pues objetos de dicha dimensión no se ven afectados por su existencia y pueden tranquilamente contraerse. Sin embargo, si en vez de eso nos fijamos en un lazo de dimensión 2, dado por las 4 caras, no hay manera de mover dichas caras de manera que el agujero que tienen dentro desaparezca. Lo que estamos viendo es que las caras han encerrado un espacio, que no pertenece al complejo, y por el cual no pueden viajar para contraerse a un punto. Si el espacio que atrapan las 4 caras perteneciera al complejo el fenómeno anterior no ocurre pues precisamente las caras pueden viajar por ese espacio y contraerse a un punto.

Este breve ejemplo ayuda a entender cómo detectar agujeros: los hoyos de un objeto se encuentran encerrados entre las caras, como si estas últimas formaran una pared que engloba un espacio por el que no se pueden mover, lo cual evita se colapsen a un punto. Esto lleva a preguntarnos, ¿cuándo un conjunto de caras en efecto encierra algo?, y es sensato pensar que lo hace cuando cada cara está pegada a otra en cada una de sus caras de dimensión uno menor. Por ejemplo, en el caso anterior cada una de las caras triangulares está pegada a otra por cada una de sus aristas. Intuitivamente, si una de las caras no estuviera pegada a otra para hacer una pared entonces por esa frontera el espacio encerrado podría salir o conectarse al exterior. Esperemos que estos comentarios hagan claro que es sensato fijarnos en las caras de dimensión uno menor de un simplejo dado, pues precisamente la manera en que éstas se peguen indicará si este objeto forma o no parte de una pared.

Con esto hemos dado una primera respuesta a las preguntas indicadas anteriormente: La dimensión de un agujero será precisamente la dimensión de las caras que se necesitan para detectarle y las características del objeto que le detectan son las maneras en que las caras de una dimensión están pegadas entre sí, mediante sus caras de dimensión uno menor.

Ahora pasaremos a dar las definiciones formales y ver como ellas vuelven formales las intuiciones que hemos desarrollado hasta ahora.

DEFINICIÓN 56. Para un simplejo σ de dimensión m definimos su frontera como la m-1 cadena que tiene como sumandos todas las caras de dimensión m-1 de σ . Extendiendo esta asignación de forma lineal nos da una función lineal $\partial_m : C_m(\mathfrak{K}) \to C_{m-1}(\mathfrak{K})$ llamada la función frontera de nivel m.

Para ejemplificar este concepto encontremos las matrices que representan a las funciones frontera para $\mathfrak{K} = \Delta_3$. Llamemos a, b, c, d a los vértices de Δ_3 , entonces por definición

$$C_0(\Delta_3) = \mathbb{Z}_2[a] \oplus \mathbb{Z}_2[b] \oplus \mathbb{Z}_2[c] \oplus \mathbb{Z}_2[d],$$

$$C_1(\Delta_3) = \mathbb{Z}_2[ab] \oplus \mathbb{Z}_2[ac] \oplus \mathbb{Z}_2[ad] \oplus \mathbb{Z}_2[bc] \oplus \mathbb{Z}_2[bd] \oplus \mathbb{Z}_2[cd],$$

$$C_2(\Delta_3) = \mathbb{Z}_2[abc] \oplus \mathbb{Z}_2[abd] \oplus \mathbb{Z}_2[acd] \oplus \mathbb{Z}_2[bcd],$$

$$C_3(\Delta_3) = \mathbb{Z}_2[abcd].$$

Ahora tenemos que

$$\partial_3(abcd) = abc + abd + acd + bcd,$$

$$\partial_2(abc) = ab + ac + bc,$$

$$\partial_2(abd) = ab + ad + bd,$$

$$\partial_2(acd) = ac + ad + cd,$$

$$\partial_2(bcd) = bc + bd + cd,$$

$$\partial_1(ab) = a + b,$$

$$\partial_1(ac) = a + c,$$

$$\partial_1(ad) = a + d,$$

$$\partial_1(bc) = b + c,$$

$$\partial_1(bd) = b + d,$$

$$\partial_1(cd) = c + d,$$

$$\partial_0(a) = 0,$$

$$\partial_0(b) = 0,$$

$$\partial_0(b) = 0,$$

$$\partial_0(d) = 0,$$

de donde las matrices que representan a estas transformaciones (en las bases ordenadas dadas) son:

$$\partial_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_0 = 0.$$

Observemos que al componer dos funciones frontera consecutivas, por ejemplo, al multiplicar sus matrices obtenemos que siempre da la función cero. Es decir,

$$\partial_{m-1} \circ \partial_m = 0.$$

Resulta ser que esta no es una coincidencia sino que siempre ocurre como se enuncia en la siguiente

Proposición 57. Sea \mathfrak{K} un complejo simplicial, entonces para cada m se cumple $\partial_{m-1} \circ \partial_m = 0$.

La proposición anterior también es geométricamente intuitiva: la función frontera detecta en sus imágenes a todas las cadenas que atrapan espacio dentro de ellas. Lo anterior, pues al considerar una m-cadena c, lo que hace $\partial_m(c)$ es devolver la frontera de c, la cual atrapa dentro de ella precisamente a c. Y ya hemos comentado anteriormente que si una cadena encierra espacio entonces todas sus caras tienen que estar pegadas a otra de la misma dimensión. Por lo tanto, cada una de las caras, de dimensión uno menor, de las caras que conforman la frontera aparece una cantidad par de veces pues siempre sirve de embonaje entre dos caras contiguas, de lo cual se sigue que $\partial_{m-1}(\partial_m(c)) = 0$.

Dado todo lo anterior tiene sentido dar la siguiente

DEFINICIÓN 58. A los elementos de la imagen del mapa frontera $\partial_{m+1}: C_{m+1}(\mathfrak{K}) \to C_m(\mathfrak{K})$ se les llama fronteras y las denotamos por $B_m(\mathfrak{K}) := Im(\partial_{m+1})$.

Mencionamos anteriormente que nuestro objetivo es detectar agujeros y que esto se lograba al hallar cadenas que embonaran bien en sus fronteras. Basados en la definición anterior tiene sentido pensar que las cadenas que lo hacen son aquellas cuya frontera se anula, pues así no hay elemento de la frontera por el que el espacio que supuestamente encierran pueda salir. Esto nos lleva a dar la siguiente

DEFINICIÓN 59. A los elementos del kernel del mapa frontera $\partial_m : C_m(\mathfrak{K}) \to C_{m-1}(\mathfrak{K})$ se les llama ciclos y las denotamos por $Z_m(\mathfrak{K}) := \ker(\partial_m)$.

Notemos que la proposición anterior ahora puede enunciarse de manera equivalente como

$$B_m(\mathfrak{K}) \subset Z_m(\mathfrak{K}),$$

para cada m. Ahora es claro que lo que queremos cuantificar es qué tan grande es $B_m(\mathfrak{K})$ dentro de $Z_m(\mathfrak{K})$, pues entre más grande sea el primero dentro del segundo menos fronteras que en verdad atrapen un agujero, y no sólo espacio formado por complejos de mayor dimensión, podrá haber. Esto nos lleva a dar la siguiente:

DEFINICIÓN 60. Sea A un complejo simplicial. Definimos el grupo de homología de nivel m como

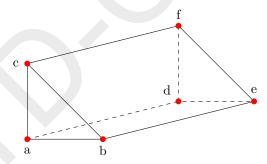
$$H_m(\mathfrak{K}) = \frac{Z_m(\mathfrak{K})}{B_m(\mathfrak{K})}.$$

A la dimensión de $H_m(\mathfrak{K})$ la llamamos el **número de Betti** de nivel m y lo denotamos por $\beta_m(\mathfrak{K})$.

- Observación 61. Cuando no haya riesgo de confusión pondremos simplemente H_m, Z_m, B_m o β_m . Además a todas las funciones frontera los denotaremos por ∂ indistintamente, sin hacer referencia al subíndice que indica la dimensión de las cadenas en las que actúan.
 - Como estamos con un complejo finito sabemos que los números de Betti son finitos, sin embargo, todo lo anterior puede hacerse palabra por palabra para complejos que no son finitos.
 - Si $z \in Z_m$, a la clase de homología que representa la denotaremos por $[z] \in H_m$.

La razón por la que hacemos cociente resultará clara con el siguiente ejemplo: recordemos que a nosotros nos interesa cuantificar los agujeros de \mathfrak{K} . Sin embargo podría haber dos ciclos que representen realmente el mismo agujero. Por ejemplo, en el siguiente ejemplo tenemos dos ciclos: ab + bc + ca y de + ef + fd. Geométricamente detectan el mismo agujero del objeto y por lo tanto no queremos que cuenten como distintos, eso se arregla pues precisamente son equivalentes módulo las fronteras ya que

$$\partial(cbf + bfe + abd + bde + acf + afd) = ab + bc + cd + de + ef + fd.$$



De cierta forma, el hecho de que dos ciclos detecten el mismo agujero indica que «entre» ellos no debe haber ningún agujero, pues de haberlo, entonces el espacio que supuestamente englobaban podría salir por allí. Es decir, el espacio entre ellos debe estar formado por un complejo de dimensión mayor que tiene a la suma de ambos ciclos como frontera. Esto es muy informal y solo sirve para solidificar nuestra intuición, por lo que recalcamos que hay que fundamentar todo los que digamos no con dibujos sino con pruebas rigurosas. Sin embargo, esperemos que estos comentarios vuelvan más clara la razón de ser por la que se dan estas definiciones.

Ahora es importante que entendamos qué queremos lograr cuando calculamos la homología. Debemos conseguir dos cosas: la primera de ellas es encontrar los números de Betti de \mathfrak{K} , pues eso nos dice la cantidad de agujeros esencialmente distintos. Sin embargo puede haber complejos simpliciales esencialmente distintos pero que tengan los mismos números de Betti por lo que también es importante entender a los representantes de cada uno de los ciclos.

Volvamos al ejemplo de $\mathfrak{K} = \Delta_3$ y calculemos su homología. Sean z_m y b_m las dimensiones de Z_m y B_m respectivamente, entonces $\beta_m = z_m - b_m$ Comencemos con H_3 : como en este caso $\partial_4 = 0$, no existen fronteras distintas de cero de donde sólo tenemos que encontrar la dimensión de Z_3 .

La matriz de ∂_2 es

$$\partial_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de donde ker $\partial_3 = \{0\}$. De aquí concluimos que $H_3 = \{0\}$.

Para el caso de H_2 notemos que la imagen de ∂_3 tiene dimensión 1. Ahora para hallar el kernel de ∂_2 veamos su matriz:

$$\partial_2 = egin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \ 1 & 0 & 1 & 0 \ 0 & 1 & 1 & 0 \ 1 & 0 & 0 & 1 \ 0 & 1 & 0 & 1 \ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil notar que las primeras tres columnas son independientes pues forman una matriz identidad de 3×3 con sus entradas inferiores, y además su suma da la cuarta columna (por supuesto, no hay que depender de argumentos así para calcular el rango, en una matriz más grande procederíamos por eliminación gaussiana). Por lo tanto el rango de ∂_2 es 3, de donde del teorema de la dimensión deducimos que dim $Z_2 = 1$. Es decir, $b_1 = 3$ y $z_2 = 1$. Con esto demostramos que

$$\beta_2 = z_2 - b_2 = 1 - 1 = 0.$$

Análogamente se deduce que $\beta_1 = 0$. Ahora haremos el caso m = 0, en esta situación toda cadena es ciclo pues $\partial_0 = 0$ y por lo tanto lo que hay que encontrar es B_0 . La matriz de ∂_1 es

$$\partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y puede verse que tiene rango 3. Como $Z_0 = C_0$ tiene dimensión 4 obtenemos que $\beta_0 = z_0 - b_0 = 4 - 3 = 1$. Por lo tanto, el único grupo no trivial de homología de Δ_3 es el de nivel cero que es isomorfo a \mathbb{Z}_2 y estará generado por la clase de cualquier elemento de Z_0 , es decir, por la clase de cualquier vértice.

6. Funciones inducidas

Ahora veremos cómo se relacionan las homologías de distintos complejos simpliciales. Lo que ocurrirá es que dado un mapa simplicial $f: \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ entre dos complejos obtendremos, para cada m, una transformación lineal $f_*: H_m(\mathfrak{K}) \to H_m(\mathfrak{L})$. Iremos mostrando la importancia de esta construcción conforme avanzamos en esta y la siguiente sección, además de que su existencia es fundamental para el tema del siguiente capítulo.

Recordemos que una función simplicial $f: \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ entre complejos simpliciales debe cumplir que para cada vértice v de \mathfrak{K} , f(v) es un vértice de \mathfrak{L} y que además si $v_1, ..., v_n$ son los vértices de alguna cara de \mathfrak{K} entonces $f(v_1), ..., f(v_n)$ deben ser los vértices de una cara de \mathfrak{L} . Sin embargo, la dimensión

de la cara que generan las imágenes de los vértices puede cambiar, es decir, a pesar de que $v_1, ..., v_n$ generen una cara de dimensión n, sus imágenes pueden generar caras de dimensión menor si hay al menos dos vértices que tienen la misma imagen. Estos comentarios son los que nos llevan a dar la siguiente

Definición 62. Sea $f: |\mathfrak{K}| \to |\mathfrak{L}|$ una función simplicial entre complejos. Para cada cara

$$\sigma = \Delta(v_1, ..., v_m)$$

de dimensión m definimos

$$f_{t}(\sigma) = \Delta(f(v_1), ..., f(v_m)),$$

en caso de que $\Delta(f(v_1),...,f(v_m))$ sea de dimensión m y

$$f_{\sharp}(\sigma) = 0,$$

en otro caso. Extendiendo esta función linealmente obtenemos una transformación lineal

$$f_{\sharp}: C_m(\mathfrak{K}) \to C_m(\mathfrak{L})$$

llamada la transformación inducida en cadenas por f.

Es importante observar que hay una función inducida por f para cada m y es la siguiente proposición fundamental la que relaciona dichas transformaciones con las funciones frontera. Con los convenios previos, en las funciones inducidas no habrá referencia al nivel en que se está induciendo, pues no hay posibilidad de confusión.

Proposición 63. Para toda función simplicial $f: |\mathfrak{K}| \rightarrow |\mathfrak{L}|$ se cumple

$$\partial \circ f_{\sharp} = f_{\sharp} \circ \partial.$$

Observación 64. Es importante notar que aquí se están utilizando los mapas frontera de ambos complejos: a la derecha son las fronteras de $\mathfrak L$ y a la izquierda las de $\mathfrak K$. Asímismo, si el mapa inducido a la izquierda es en nivel m, entonces el que está a la derecha es en nivel m-1.

Gracias a la proposición anterior tenemos que si $c \in Z_m(\mathfrak{K})$ entonces

$$\partial(f_{\mathsf{H}}(c)) = f_{\mathsf{H}}(\partial(c)) = f_{\mathsf{H}}(0) = 0,$$

por lo que podemos considerar la función $f_{\sharp}: Z_m(\mathfrak{K}) \to Z_m(\mathfrak{L})$ y podemos componer con la proyección natural $\pi: Z_m(\mathfrak{L}) \to H_m(\mathfrak{L})$ y así tener la transformación

$$\pi \circ f_{\sharp}: Z_m(\mathfrak{K}) \to H_m(\mathfrak{L}).$$

Además, si c es una frontera, es decir si $c = \partial c'$, entonces

$$\pi(f_{\sharp}(c)) = \pi(f_{\sharp}(c))$$

$$= \pi(f_{\sharp}(\partial(c')))$$

$$= \pi(\partial(f_{\sharp}(c)))$$

$$= 0,$$

de donde vemos que la función realmente desciende al cociente (es decir, a homología) dando una transformación:

$$f_*: H_m(\mathfrak{K}) \to H_m(\mathfrak{L}),$$

definida como $f_*([c]) = [f_{\sharp}(c)]$ y en generadores es

$$f_*([\Delta(v_1,...,v_m)]) = [\Delta(f(v_1),...,f(v_m))].$$

Hemos demostrado la siguiente

Proposición 65. La transformación $f_{\sharp}: C_m(\mathfrak{K}) \to C_m(\mathfrak{L})$ desciende a homología para generar una transformación

$$f_*: H_m(\mathfrak{K}) \to H_m(\mathfrak{L}),$$

que en generadores es $f_*([\Delta(v_1,...,v_m)]) = [\Delta(f(v_1),...,f(v_m))]$, siempre y cuando $f(v_1),...,f(v_n)$ generen una cara de dimensión m, y cero en otro caso.

DEFINICIÓN 66. A la función, cuya existencia se prueba en la proposición anterior, se le llama la función inducida en homología por f y suele denotársele por $f_*: H_m(\mathfrak{K}) \to H_m(\mathfrak{L})$ o por $f: H_m(\mathfrak{K}) \to H_m(\mathfrak{L})$ cuando no hay riesgo de confusión.

Las propiedades fundamentales de la función inducida están dadas en la siguiente

PROPOSICIÓN 67. Si $f: |\mathfrak{K}| \to |\mathfrak{L}|$ $y g: |\mathfrak{L}| \to |\mathfrak{G}|$ son funciones simpliciales, se cumple que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Además si Id es la función identidad en algún complejo simplicial, se tiene que $(Id)_* = Id$.

Observación 68. En otras palabras, la función que asigna a cada función simplicial f su función inducida f_* es functorial de manera covariante.

Un ejemplo que será muy importante para nosotros es el caso en que \mathfrak{K} es un subcomplejo de \mathfrak{L} . En tal situación $C_m(\mathfrak{K})$ es un subespacio vectorial de $C_m(\mathfrak{L})$ pues para cualquier colección de vértices $v_1, ..., v_m$, que generen una cara de \mathfrak{K} , se tiene que también generan la misma cara en \mathfrak{L} . Sin embargo, no es verdad que $\iota_*: H_m(\mathfrak{K}) \to H_m(\mathfrak{L})$ sea una inyección, donde ι es la inclusión natural. La razón de ser de esto es que, a pesar de que un ciclo en $C_m(\mathfrak{K})$ pueda no ser una frontera, quizá al considerarlo en $C_m(\mathfrak{L})$ si lo sea.

Para ejemplificar el último punto supongamos que $\mathfrak{L} = \Delta_2$ y que \mathfrak{K} es Δ_2 sin el interior del triángulo. Si los vértices son a, b, c entonces consideremos la clase $[ab + bc + ca] \in H_1(\mathfrak{K})$. Es una clase distinta de cero porque no hay simplejos de dimensión mayor a 1, lo cual hace imposible que sea frontera. Sin embargo, [ab + bc + ca] considerada en $H_2(\mathfrak{L})$ corresponde a la clase 0 pues precisamente

$$ab + bc + ca = \partial(abc)$$
.

Con esto hemos visto que a pesar de que $f: \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ sea inyectiva, no necesariamente sus funciones inducidas lo serán. De hecho, será precisamente este punto lo que hará que la homología persistente, tema a desarrollar en el próximo capítulo, sea interesante.

Otra de las aplicaciones fundamentales de las funciones inducidas es lo que ocurre cuando la función $f:\mathfrak{K}\to\mathfrak{L}$ es un homeomorfismo lineal. En tal situación existe una inverso lineal $f^{-1}:\mathfrak{L}\to\mathfrak{K}$ tal que $f\circ f^{-1}=Id_{\mathfrak{L}}$ y $f^{-1}\circ f=Id_{\mathfrak{K}}$. Analizando la función inducida se obtiene, por functorialidad, que $f_*\circ (f^{-1})_*=Id_{H_*(\mathfrak{L})}$ y $(f^{-1})_*\circ f_*=Id_{H_*(\mathfrak{K})}$. De donde que $f_*:H_*(\mathfrak{K})\to H_*(\mathfrak{L})$ es un isomorfismo. En otra palabras, hemos justificado la siguiente

Proposición 69. La homología simplicial es invariante ante homeomorfismos lineales.

Observación 70. La homología simplicial es un invariante más sensible que lo que aquí probamos, realmente la homología es un invariante homotópico. La homotopía es una relación de equivalencia más débil que el homemorfismo que no utilizaremos aquí, pero que es una de las herramientas más importantes de la homología. En la siguiente sección discutiremos un poco más al respecto de este punto.

7. Comentarios relevantes sobre la homología

A continuación mencionamos algunos puntos que es bueno saber sobre homología, tanto de lo expuesto anteriormente así como del tema en general. De cada uno de los puntos siguientes podríamos hacer un capítulo entero, así que para mantenerlo breve lo pondremos en forma de lista y sólo se mencionarán ideas esenciales del punto en cuestión.

1. Otras homologías: La construcción de todas las homologías sigue el mismo principio básico: construir un espacio de cadenas y luego definir las funciones frontera ∂ que los relacionan, de tal modo que $\partial \circ \partial = 0$. Por lo general se pretende que los grupos de cadenas sean espacios vectoriales, o al menos grupos abelianos, y las funciones frontera ∂ sean morfismos. Posiblemente, la construcción más famosa sea la de la homología singular que se obtiene al dar la siguiente

DEFINICIÓN 71. Sea X un espacio topológico. Definimos un m-cadena singular como una función continua $\sigma: \Delta_m \to X$.

El espacio de *m*-cadenas es precisamente el espacio vectorial libre generado por las cadenas singulares. Definir la función frontera es ligeramente más complicado, pero captura la misma idea: determinar cuáles son las caras del complejo en cuestión que encierran un espacio dentro. Los ciclos y fronteras se definen exactamente de la misma forma, y la homología se define con el mismo cociente.

La diferencia fundamental de esta construcción con la homología simplicial que hemos estudiado es que aquí no suponemos que X tenga ninguna estructura adicional por lo que esto puede definirse en espacios topológicos muy generales, incluso en aquellos que no son triangulables. La manera en que esta construcción empata con la homología simplicial es que en un complejo $|\mathfrak{K}|$ ya tenemos ciertas cadenas singulares dadas por su descomposición en simplejos: las cadenas singulares son simplemente las funciones simpliciales que mandan el complejo estándar a los simplejos de $|\mathfrak{K}|$. El espacio vectorial generado sólo por estas cadenas singulares simpliciales dentro de todo el espacio de cadenas singulares es isomorfo, como espacio vectorial, al complejo de cadenas simpliciales que nosotros hemos construido anteriormente y además la acción de la función frontera singular coincide allí con la función frontera simplicial. Por lo tanto, nuestra construcción se encuentra dentro de esta construcción más general y es un resultado importante que estas dos construcciones, al pasar a homología, coinciden.

Lo que vuelve tediosa a la homología simplicial es que, a pesar de que calcularla se reduce a simples calculos de álgebra lineal, la cantidad de esas computaciones sube mucho conforme la cantidad de simplejos crece. Para llevar a cabo simplificaciones en los cálculos se deben desarrollar varios procesos, pero como uno debe mantenerse dentro de los complejos simpliciales, siempre se tiene que estar cuidando que las construcciones hechas se lleven a cabo dentro de este conjunto. Sin embargo, es importante enfatizar que sí hay procesos de simplificación. En

cambio, en la homología singular es increiblemente más sencillo el proceso de computación del cálculo de homologías de un espacio a partir de la homología de algunos de sus subespacios.

Otras variaciones de estas homologías si utilizan estructuras adicionales en X que no son tan restrictivas como las que impone ser complejo simplicial. Un ejemplo de tal homología es la llamada homología celular, cuya construcción se basa principalmente en generalizar la idea de esqueletos que vimos anteriormente. Un complejo CW es un espacio que se va formando de pegar fronteras de esferas llenas de una dimensión sobre espacios formados por esferas de dimensión estrictamente menor. Si se reflexiona un poco eso es justamente lo que se hace en la cadena de esqueletos $\mathfrak{K}_0 \subset ... \subset \mathfrak{K}_n$, pues para obtener \mathfrak{K}_{m+1} de \mathfrak{K}_m lo que hay que hacer es precisamente pegar esferas, en forma de (m+1)- simplejos, sobre el espacio formado por los simplejos de dimensión menor.

Los pasos que se siguen en esta homología son semejantes a la homología simplicial, definiendo el espacio de cadenas como el espacio generado por las esferas de dimensión m que se hayan utilizado. Sin embargo, definir el mapa frontera en esta ocasión es más delicado que en casos anteriores pues deben tomarse en cuenta como interactua cada esfera con todas las esferas de dimensión exactamente uno menor. Sin embargo, una vez que se entiende este proceso, resulta más sencillo el cálculo pues complejos simpliciales que requieren muchos simplejos para construirse quizá requieran pocas esferas para hacerlo. Un ejemplo de este fenómeno ocurre en el toro: la menor triangulación del toro necesita al menos 14 caras, sin embargo el toro puede construirse utilizando exactamente 4 esferas (un punto, dos intervalos y un disco).

Otra variación importante viene cuando en vez de considerar espacios vectoriales sobre \mathbb{Z}_2 se considera otro anillo conmutativo con unidad. Por lo general suelen utilizarse $\mathbb{Z}_n(n > 2), \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o \mathbb{Z} . Estos espacios no pueden ser ignorados y presentan complicaciones nuevas que no aparecen en el caso general, pues debe introducirse el concepto de orientación de los simplejos y por lo tanto la función frontera no sólo debe capturar los límites de un simplejo sino la orientación de éstos. Especialmente en \mathbb{Z} este fenómeno es muy importante pues no se trabaja con espacios vectoriales sino con grupos abelianos libres lo cual complica, pero al mismo tiempo enriquece, mucho la teoría. Por ejemplo, gran parte de la teoría de clases características está desarrollada con grupos de homología que trabajan sobre \mathbb{Z} .

No podemos ignorar también que existe la cohomología. La cohomología se obtiene al dualizar los grupos de cadenas, es decir, en vez de considerar $C_m(\mathfrak{K})$ se considera $C_m(\mathfrak{K})^*$, el espacio dual de $C_m(\mathfrak{K})$, y, por supuesto, relacionarlos mediante el dual del mapa frontera, $\delta = \partial^*$. Como se sigue cumpliendo que $\delta \circ \delta = 0$, la definición de ciclo y frontera puede seguirse haciendo, pero para distinguirlos de la homología se les suele llamar cociclo y cocadena. Sin embargo, hay una diferencia fundamental entre la cohomología y la homología: hay una manera de multiplicar elementos de la cohomología, pues son funciones que van a \mathbb{Z}_2 (o al anillo que se use para los coeficientes) y por lo tanto, la cohomología no es solo un espacio vectorial sino un anillo. El producto en cohomología es el famoso producto copa. Por eso suele hablarse del anillo de cohomología. Hay espacios que no pueden distinguirse mediante su homología o cohomología como espacios vectoriales, sino que se necesita observar que es la estructura de producto la que es ditinta.

A veces es la cohomología la que aparece de manera natural. Por ejemplo, la cohomología de DeRham definida para variedades diferenciables aparece naturalmente una vez que se

definen las formas diferenciales y se estudia la derivada exterior en ellas. Es por esto que la cohomología es muy importante, pues se relaciona directamente con el lenguaje de las ecuaciones diferenciales dado mediante las formas diferenciales.

2. Homotopías y su uso: En general la homotopía es una manera de formalizar la noción de deformar un espacio o una función de manera continua. La definición general suele ser

DEFINICIÓN 72. Sean $f,g:X\to Y$ dos funciones continuas. Una **homotopía** entre ellas es una función continua $H:X\times [0,1]\to Y$ tal que H(x,0)=f(x) y H(x,1)=g(x) para cualquier $x\in X$. Si existe una homotopía entre f y g diremos que son **homotópicas** y pondremos $f\sim g$.

Si para cada $t \in [0,1]$ dejamos que $H_t(x) = H(x,t)$ tenemos que f se deforma hacia g mediante la curva de funciones H_t . La noción de homotopía es muy utilizada en varios contextos, por ejemplo, en la construcción del grupo fundamental o en la demostración de la invarianza de la integral compleja bajo curvas homotópicas. La noción de homotopía nos permite dar la siguiente

Definición 73. Dos espacios topológicos son **homotópicos** si existen funciones continuas $f: X \to Y, g: Y \to X$ tales que

$$f \circ g \sim Id_Y, g \circ f \sim Id_X.$$

A f se le llama una equivalencia homotópica de X a Y.

Por ejemplo, puede demostrarse fácilmente que $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ y \mathbb{S}^n son homotópicos. La homotopía es una herramienta fundamental en la homología pues es un invariante más debil que el homeomorfismo, pues claramente hay espacios homotópicos que no son homeomorfos, pero suficientemente sólido para mantener invariante a la homología. Si se reflexiona un poco, geométricamente, puede uno convencerse que la homotopía no puede destruir o crear agujeros pues precisamente con una homotopía se pretende deformar un espacio, mediante su espacio de sobra, hasta llevarlo a otro que contenga la información esencial sobre sus huecos. Más precisamente tenemos los siguientes

TEOREMA 74. Sean $f, g: X \to Y$ dos funciones homotópicas, entonces $f_* = g_*$. En palabras, funciones homotópicos inducen funciones iguales en homología.

Teorema 75. Sea $f: X \to Y$ una equivalencia homotópica, entonces

$$f_*: H_*(X) \to H_*(Y)$$

es un isomorfismo.

En este teorema nos referimos al teorema en homología singular. Como este resultado es muy útil es deseable que se tenga algo análogo en homología simplicial, sin embargo, los conceptos se complican precisamente porque tenemos que mantener todas las construcciones dentro de la categoría de complejos simpliciales.

Resulta que extender la noción de homotopía a este contexto no es tan sencillo pues la definición que se ha dado anteriormente no funciona, pues f_t bien podría no ser simplicial. La homotopía es una manera de decir que dos mapas son *cercanos* en algún sentido y es esto lo que se intenta preservar en la definición de *cercanía* en el caso de complejos simpliciales. No

daremos más detalles pues eso nos llevaría muy lejos, ya que nos faltan varias definiciones, pero comentaremos más en el siguiente punto.

3. Extensión de funciones inducidas a funciones no simpliciales: Hay una realidad que enfrentar cuando uno trabaja con complejos simpliciales: muchos espacios topológicos, a pesar de ser triangulables, no aparecen de manera natural con una triangulación. Por ejemplo, piense en las esferas, todas ellas admiten una triangulación y sin embargo no trabajamos con ella en su versión triangulada. Más aún, una función entre espacios triangulables no tiene porque ser simplicial. Nuevamente, piense en las funciones $f_n: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dadas por $f_n(z) = z^n$. Dichas funciones son fundamentales en el círculo pero si forzáramos su naturaleza a alguna triangulación adquirirían una forma sumamente rara. Más precisamente, si $F: X \to Y$ es una función entre espacios topológicos triangulables y (\mathfrak{K}_X, h_X) y (\mathfrak{K}_Y, h_Y) son triangulaciones de X e Y, respectivamente, entonces podemos considerar $\widetilde{F} = h_Y^{-1} \circ F \circ h_X$, para tener la función entre los poliedros, pero difícilmente será una función simplicial.

De todos modos insistimos en poder hablar de funciones inducidas para cualquier función continua y no sólo los simpliciales. La manera de hacer esto es precisamente mediante una noción de cercanía de funciones que busca obtener los mismos resultados que la homotopía de funciones (i.e. invarianza de la homología). Tal noción se conoce como aproximación simplicial a una función continua f, y tal aproximación no es más que una función simplicial que cumple cierta propiedad, que no mencionamos, pero que se encarga de medir la cercanía entre f y g. El resultado fundamental es:

TEOREMA 76 (Teorema de aproximación simplicial). Sea $f: |\mathfrak{R}| \to |\mathfrak{L}|$ un función continua entre poliedros, entonces existe una función simplicial $g: |\mathfrak{R}| \to |\mathfrak{L}|$ que es homotópica a f.

Observación 77. Es importante recalcar nuevamente que el concepto de funciones homotópicas, en el contexto simplicial, no coincide a las deformaciones mediante una curva de mapas como se mencionó en la sección anterior. Por eso es fundamental pasar al contexto de aproximaciones simpliciales.

El teorema anterior indica que cualquier función continua, a pesar de no ser simplicial, siempre está cerca de una función que sí es simplicial. Más aún, gracias a que se tiene el siguiente

TEOREMA 78. Sea $f: |\mathfrak{K}| \to |\mathfrak{L}$ una función continua $g, h: |\mathfrak{K}| \to |\mathfrak{L}|$ aproximaciones simpliciales a f. Entonces se cumplen

- 1. g y h son aproximaciones simpliciales mutuamente;
- 2. $f_* = g_*$, es decir, funciones simpliciales que son aproximaciones simpliciales mutuamente inducen la misma función en homología.

Gracias a esto tenemos la siguiente

DEFINICIÓN 79. Sea $f: |\mathfrak{K}| \to |\mathfrak{L}|$ cualquier función continua entre poliedros. Definimos $f_*: H_*(|\mathfrak{K}|) \to H_*(|\mathfrak{L}|)$ como

$$f_{\cdot} = a_{\cdot}$$

 $donde \; g: \mid \mathfrak{K} \mid \rightarrow \mid \mathfrak{L} \mid \; es \; cualquier \; aproximación \; simplicial \; a \; f.$

Gracias a esto sabemos que cualquier función induce funciones en homología y no sólo las simpliciales, lo cual da más fuerza a la teoría ya que permite trabajar con cualquier función continua. Cabe destacar que esta no es la única homología donde se tienen que tomar en cuenta esta clase de fenómenos, por ejemplo, en homología celular existe el teorema análogo (Teorema de aproximación celular) y sirve, entre otras cosas, para extender la definición de función inducida a cualquier función continua. Generalmente, estos problemas aparecen cuando la homología utiliza cierta estructura para definirse y las funciones inducidas se definen inicialmente para aquellas funciones que preserven dicha estructura.

4. Teoremas relevantes de la homología: La homología es una estructura muy amplia que puede variar en muchas formas, ya hemos mencionado dos de ellas: una posible variación es cambiar los coeficientes del grupo de cadenas, otra es cambiar la definición de cadenas. Es deseable que todas estas homologías puedan relacionarse entre sí y el hecho de que pueda hacerse es una de las fortalezas de la teoría. Más aún, para poder describir correctamente estos teoremas se necesitó desarrollar ampliamente la teoría de categorías, pues fue con ella con quien se pudieron abarcar teoremas sobre construcción de homologías sin entrar en los detalles muy particulares de cada teoría. En un momento daremos más detalles.

No enunciaremos los teoremas de manera general, más bien daremos algunas ideas de lo que dicen. Para comparar homologías con distinto grupo de coeficientes uno recurre al *Teorema de coeficientes universales*, que vagamente dice que todos los grupos de homología pueden construirse a partir de la homología con coeficientes en \mathbb{Z} . Un caso particularmente importante es cuando uno desea cambiar de \mathbb{Z} a un anillo finitamente generado Λ o un campo. En tal situación se cumple la cómoda relación

Teorema 80. (Teorema de coeficientes universales, caso particular) Sea Λ un anillo finitamente generado, entonces para cada m se tiene

$$H_*(X,\Lambda) = H_*(X,\mathbb{Z}) \otimes \Lambda,$$

en el sentido de que ambas homologías son isomorfas naturalmente.

Parte de la importancia fundamental de introducir la teoría de categorías en la homología es para dar un sentido preciso a la frase *isomorfas naturalmente*. Sin entrar en demasiados detalles, lo que esto quiere decir es que en cada nivel de la construcción hay funciones lineales que relacionan la primera homología con la segunda y que hacen conmutar todos los diagramas que aparecen. Realmente lo mejor para entender esto es ir a ver las referencias sobre el tema y hacer varios ejemplos, es un punto esencial de la homología entender la gran generalidad de este lenguaje pues todos los teoremas lo utilizan.

Más aún, hay una manera de comparar distintas homologías y decir que son isomorfas naturalmente. El teorema que permite hacer esto se llama teorema del modelo acíclico de Samuel Eilenberg y Saunders MacLane. No enunciaremos el teorema aquí pues nos falta mucha notación y lenguaje. Es mediante este teorema que distintas versiones de homología (celular, simplicial, singular, etc.) puede demostrarse que coinciden, es decir, son isomorfas naturalmente, para aquellos espacios que permitan se desarrollen estas teorías en ellos. No podemos dejar de enfatizar: es un teorema increiblemente importante y está enunciado en el lenguaje de categorías.

Finalmente, también es deseable poder relacionar la homología de un espacio con la de sus partes. Hay dos maneras esenciales de hacer esto: mediante cubiertas abiertas y mediante productos y hay un teorema al respecto para cada caso. El teorema con cubiertas abiertas es el siguiente:

Teorema 81. (Teorema de Mayer-Vietoris) Sea $X=U\cup V$, donde U,V son abiertos de X. Existe una sucesión exacta larga de homología que relaciona las homologías de estos espacios:

$$\dots \to H_k(U \cap V) \to H_k(U) \oplus H_k(V) \to H_k(X) \to H_{k-1}(U \cap V) \to \dots \to H_0(X) \to 0.$$

Más aún, la sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris es natural.

Observación 82. 1. Es importante recalcar que la existencia del homomorfismo

$$H_k(X) \to H_{k-1}(U \cap V),$$

llamado homomorfismo de conexión, es una de las razones esenciales de que la teoría se vuelva tan fuerte. Siempre es un paso importante entender qué está haciendo este homomorfismo geométricamente, pues su construcción es meramente algebraica.

2. Hay una versión especial de Mayer-Vietoris para complejos simpliciales, donde a U y a V se les pide que tengan ciertas propiedades compatibles con la estructura de complejo del espacio ambiente.

Finalmente el teorema que relaciona la homología de un producto con sus factores, al menos en el caso en que los coeficientes son finitamente generados, es

Teorema 83. (Fórmula de Kunneth, caso particular) Sean X, Y dos espacios topológicos, entonces existe un isomorfimo natural tal que

$$H_k(X \times Y) = \bigoplus_{p+q=k} H_p(X) \otimes H_q(Y).$$

Puede objetarse, y con justa razón, por qué no estamos estudiando con más detalle estos temas tan importantes. La razón principal es que para los motivos que perseguimos no nos harán falta, además de que hay excelentes referencias sobre el tema. Sin embargo, enfatizamos nuevamente, estos temas no pueden faltar a nadie que pretenda estudiar topología, geometría, ecuaciones diferenciales, etcétera de manera seria.

8. Notas v bibliografía

En esta sección agregamos algunos comentarios breves sobre los libros consultados para escribir este capítulo. Las fichas bibliográficas completas de estos libros aparecen al final, en el capítulo de bibliográficas.

Introduction to Topological Manifolds. John M. Lee: Este libro es una muy buena introducción a la topología en general, y sólo cubre hasta el último capítulo nociones básicas de homología singular. Sin embargo, como para entender la homología de manera profunda es fundamental tener buenas bases topológicas, propongo estudiar este libro a cualquiera que desee mejorar sus conocimientos sobre el tema.

La segunda edición del libro contiene en su quinto capítulo un estudio, bastante decente, de complejos simpliciales y sus propiedaes fundamentales. Luego en el sexto capítulo utiliza esa teoría para clasificar las superficies compactas. Lamentablemente, en la segunda edición se prescindió de gran parte de este estudio (aunque vienen expuestos algunos puntos rápidamente), en favor de la teoría de complejos CW, la cual también es una teoría fundamental con su propia teoría de homología.

Recalcamos aquí que la teoría más común en homología y cohomología es la singular, y este libro trae un capítulo dedicado a ello que puede servir como preparación para textos más enfocados al tema.

Algebraic Topology. C.R.F Maunder: Este es un libro muy completo pero bastante denso en su manera de exponer los temas. No sólo abarca homología sino que estudia el grupo fundamental y los grupos de homotopía superiores, así cómo cohomologías y los teoremas de dualidad (como son la dualidad de Poincaré o la dualidad de Alexander, entre otras). También estudia los complejos CW.

Es este libro el que expone de la manera más completa el tema de los complejos simpliciales y sus teoremas fundamentales. En particular, aquí se demuestran completamente los teoremas de aproximación simplicial y sus consecuencias. El capítulo donde se abordan estas cuestiones es el segundo, aunque continua usándolas una y otra vez. Es necesario hacer notar que el libro también decide estudiar homología singular primero, y luego introducir a la homología simplicial como una subteoría de la misma. Esto se lleva a cabo en el capítulo cuatro del libro. En tal parte, el capítulo muestra métodos para calcular la homología simplicial y utiliza técnicas que se desarrollan al estudiar el grupo fundamental, en el tercer capítulo. Así que mi recomendación para leer la parte de homología de este libro es leer completamente el segundo y tercer capítulo, para luego poder entender bien el cuarto capítulo y todos sus detalles.

Admito que es un libro pesado de leer pero para el cual vale mucho la pena hacer el esfuerzo, pues da una gran variedad de técnicas e introduce muchas ideas que en otros textos no aparecen, en pro de hacer los escritos más amenos o menos enciclopédicos.

Algebraic Topology: An Intuitive Approach. Hajime Sato: La función de este libro es ser leído rápidamente sin necesidad de comprender todas las pruebas. Más bien, se centra en que el lector aprenda a utilizar las herramientas y en comprender las ideas detrás de ellas, sin que necesariamente se muestren los detalles técnicos. Creo una buena idea es tener este texto a la mano cuando se leen otros relacionados. Además hay que mencionar que se abordan temas como haces vectoriales y sus clases características o secuencias espectrales que han jugado un papel prominente en el desarrollo posterior de la teoría.

Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology. James W. Vick: Este texto está dedicado exclusivamente a estudiar homología, cohomología y sus propiedades. La homología central nuevamente es la singular, pero muestra distintas homologías que se pueden construir y su equivalencia con la singular. De hecho, para mostrar equivalencias entre teorías desarrolla el teorema del modelo acíclico, que se mencionó anteriormente. El libro contiene bastantes ejemplos aunque, en algunas ocasiones, no es totalmente riguroso en favor de enfatizar las ideas detrás del texto, o bien, por suponer que el lector ya tiene conocimiento de algunos trucos estándar.

Algebraic Topology. Allen Hatcher: Este es el libro de topología algebraica por excelencia, además de que es gratis y puede descargarse de la página del autor. Aborda todos los temas de

topología algebraica clásicos y los explica con una maestría sublime y, además de eso, complementa el texto central con aplicaciones importantes o con temas más avanzados, así como con grandes listas de ejercicios que ayudan mucho a desarrollar la intuición y mejorar la práctica. Mi recomendación personal es, como un primer paso, leer con cuidado los primeros cuatro capítulos (el capítulo cero incluido) e intentar la gran mayoría de los ejercicios. Hay que tener en cuenta que hay algunos errores en el libro y que el autor lleva una lista de erratas, que también se pueden descargar de su página.

Aquí, nuevamente, la teoría central que se utiliza es nuevamente la singular. Sin embargo, a diferencia de los otros textos, la homología simplicial no se desarrolla como una subteoría, sino que se estudia primero para motivar las ideas principales de la homología. Es importante recalcar que utiliza una definición más relajada de lo que es un complejo simplicial, por lo que su teoría admite algunos casos más generales que, estrictamente hablando, la teoría desarrollada en estas notas no abarca. Esta teoría más general es la llamada teoría de descomposiciones simpliciales, y es parecida a la de descomposiciones celulares.

Aunque los demás textos también abarcan los temas de producto copa y producto capa, y la dualidad de Poincaré (entre otras), creo este es el libro que lo hace de la manera más detallada e intuitiva y, definitivamente, muestra muchos ejemplos que ayudan bastante a entender la idea detrás de estos conceptos. Todos estos temas está cubiertos en los ya mencionados primeros cuatro capítulos.

Elementary Applied Topology, Robert Ghrist: Este es un libro maravilloso. Se centra en mostrar las aplicaciones de diversas teorías de la topología en otras áreas de la matemática, y lo hace de manera extraordinaria. En particular el segundo y quinto capítulos, que trata sobre complejos y homología, son muy buenos. Por cierto, el séptimo capítulo es sobre cohomología. Recomiendo mucho leer este libro, no de inicio a fin, sino mirando aquí y allá diversos temas de interés. En particular, a mí me parece fantástica la demostración de que el juego Hex, inventado por John Nash, siempre tiene un ganador. Utiliza homología de manera increible, pueden encontrarlo en la sección 5.12. No tengo suficientes elogios para este libro, es magnífico.

Computational Topology, An Introduction. Herbert Edelsbrunner, John Harer: Lo que hemos mostrado aquí puede estudiarse de este libro, el cual está orientado en gran parte a las aplicaciones de la homología persistente, por lo cual es una muy buena opción. A mí parecer, el libro es un poco superficial en cuanto a demostraciones se refiere, pues expone pocas de ellas en favor de dar una amplia gama de resultados y aplicaciones, expuestas de manera bastante completa y con buenas referencias para poder continuar con el estudio personalmente.

El capítulo relacionado a los complejos simpliciales es el tercero. Aquí menciona muy rápidamente lo que otros libros, por ejemplo el Maunder, demuestra cuidadosamente, pero a cambio de eso muestra como distintas partes de la teoría embonan para resolver o formalizar otros problemas, así como mostrar algunos teoremas que no aparecen en los textos anteriores. Uno de tales teoremas es el teorema del nervio central (nerve theorem, en inglés). El capítulo cuatro del libro está dedicado a homología, y el quinto a la cohomología. Son capítulos breves, en cuanto a desarrollo de la idea de homología conceptualmente, y avanza rápidamente hacia aplicaciones y métodos de computación.

Un atributo que hay que reconocerle al libro es que se enfoca mucho en mostrar como desarrollar algoritmos para calcular las diversas propiedades que un objeto pueda tener. Por

ejemplo, para calcular homologías habla sobre algoritmos con matrices que se pueden programar en una computadora, y de hecho muestra el pseudocódigo para hacerlo. Esa tendencia es muy valiosa pues, a pesar de quizá nunca programar explícitamente los algoritmos, muestra que estas teorías son computables por métodos concretos una vez que se tiene suficiente información y, gracias a ello, pone en relieve la gran importancia que la ciencia de la computación tiene que jugar en este tema.

Finalmente, aunque menos relevante académicamente quizá, los dibujos que muestra están preciosos. Es un libro que se disfruta mucho leer.

Topology for Computing. Afra J. Zomorodian: Gran parte de los comentarios dichos para el texto anterior aplican para este, con la gran diferencia de que este libro si se enfoca en mostrar muchas más demostraciones. Algo fundamental de este libro es que demuestra cuidadosamente gran parte de los algoritmos que propone, a diferencia del texto anterior, que generalmente sólo desglosa las ideas utilizadas pero deja mucho que llenar para el lector riguroso. Los temas de homología y complejos simpliciales aparecen en la primera parte del libro, concretamente en el segundo y en el cuarto.

Creo la mejor manera de aprovechar este libro es leyéndolo junto con el Computation Topology de Edelsbrunner y Harer (y viceversa). Se complementan de manera extraordinaria y dan una visión de la teoría que pretenden exponer muy completa.

Homología persistente

1. Filtraciones

A partir de ahora supondremos que \mathfrak{K} es un complejo simplicial de dimensión n. El primer paso importante para entender la idea de persistencia es la siguiente

DEFINICIÓN 84. Una filtración de \Re es una colección $\Re_0 \subset \Re_1 \subset ... \subset \Re_m$ de complejos tales que:

- $\blacksquare \mathfrak{K}_m = \mathfrak{K},$
- \mathfrak{K}_i es un subcomplejo de \mathfrak{K}_{i+1} para i = 0, 1, ..., m-1.

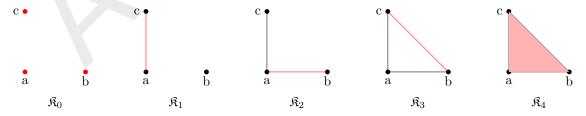
Es importante observar que no existe una única filtración para un complejo general, de hecho, la cuestión de determinar una buena filtración que se ajuste a nuestros objetivos o que cumpla propiedades adicionales que faciliten nuestro análisis es una cuestión importante.

Es conveniente pensar a una filtración como una sucesión de fotografías del pasado de \mathfrak{K} , conforme este complejo crece hasta volverse el complejo \mathfrak{K} . De hecho, en la definición a veces suele pedirse $\mathfrak{K}_0 = \emptyset$ para asegurarnos que originalmente empezamos desde nada y que vemos completamente el crecimiento de \mathfrak{K} .

Veamos ahora algunos ejemplos de filtraciones a los que volveremos más tarde. El primero será una filtración de Δ_2 dada por

- $\mathfrak{K}_0 = \{a, b, c\},\$
- $\bullet \mathfrak{K}_1 = \{a, b, c, ac\},\$
- $\Re_2 = \{a, b, c, ac, ab\},\$
- $\blacksquare \mathfrak{K}_3 = \{a, b, c, ac, ab, bc\},\$
- $\Re_4 = \{a, b, c, ac, ab, bc, abc\}.$

Gráficamente se ve como sigue:

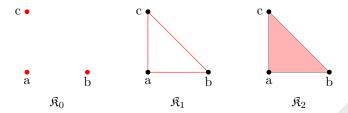


Hemos marcado con rojo los simplejos nuevos que se han agregado en cada paso. Obsérvese que cada complejo en efecto es un subcomplejo del complejo siguiente. Esta es una filtración de 5 pasos. Otra filtración de este complejo, ahora de dos pasos, es:

- $\mathfrak{K}_0 = \{a, b, c\},\$
- $\mathfrak{K}_1 = \{a, b, c, ac, ab, bc\},$

•
$$\mathfrak{K}_2 = \{a, b, c, ac, ab, bc, abc\}.$$

Gráficamente se ve como sigue:



La filtración anterior es un caso particular de una filtración presente a todos los complejos: para un complejo \Re podemos definir \Re_i como el *i*-esqueleto de \Re . Claramente esta será una filtración de n pasos. Esta es una filtración canónica para los simplejos, lamentablemente en ocasiones no es apropiada para nuestros fines pues la manera en que las diversas caras de \Re aparecen puede ser inapropiado. Conforme avancemos en este capítulo se irá volviendo claro porque la veracidad de dicho comentario. No es muy complicado entender qué es una filtración, así que no nos detendremos mucho en esto. Iremos viendo más ejemplos conforme desarrollemos más teoría.

2. Homología persistente

Ya hemos definido la homología simplicial de un complejo dado, y en la sección anterior vimos el concepto de filtración. La homología persistente une estos dos conceptos, asociados a \mathfrak{K} , para formar un nuevo objeto algebraico del que se pretende destilar información topológica sobre el crecimiento de \mathfrak{K} visto mediante la filtración.

Supongamos que tenemos una filtración $\mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K}_1 \subset ... \subset \mathfrak{K}_m = \mathfrak{K}$ y denotemos por $\iota_{i,j} : \mathfrak{K}_i \to \mathfrak{K}_j$ a la inclusión canónica. Es claro que $\iota_{i,j}$ es una función simplicial, puesto que \mathfrak{K}_i es un subcomplejo de \mathfrak{K}_{i+1} y además $\iota_{i,j} = \iota_{j-1,j} \circ ... \circ \iota_{i,i+1}$.

Para cada $0 \le i \le m$ podemos calcular la homología simplicial de \mathfrak{K}_i , tal como se mostró en el capítulo anterior. Este proceso nos arroja ciertos espacios vectoriales, sobre \mathbb{Z}_2 , denotados por $H_p(\mathfrak{K}_i), p = 0, 1, ..., n$. Observemos que para p > n todos los grupos de homología serán triviales pues la dimensión de \mathfrak{K} es n.

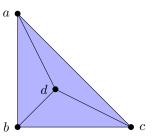
Así mismo, las inclusiones $\iota_{i,j}$ inducen transformaciones lineales en homología:

$$(\iota_{i,j})_*: H_p(\mathfrak{K}_i) \to H_p(\mathfrak{K}_j),$$

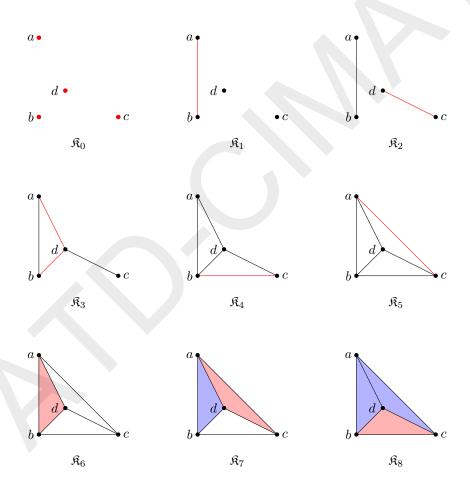
para cada p = 0, 1, ..., n. Por lo general solamente escribiremos $\iota_{i,j}$ en vez de $(\iota_{i,j})_*$ siempre que no haya confusión.

El objetivo central de la homología persistente es entender cómo se relacionan los distintos grupos de homología mediante las inclusiones. Antes de dar la definición formal estudiemos a detalle un ejemplo que mostrará diversas facetas que nos interesa definir precisamente para posteriormente estudiarlas.

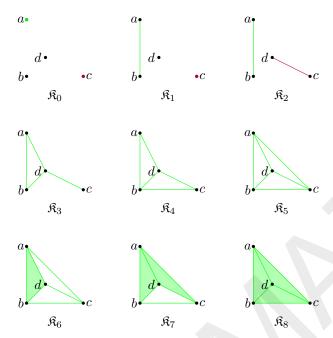
El complejo que estudiaremos será $\mathfrak{K} = \{a, b, c, d, ab, bc, ca, ad, bd, cd, abd, bcd, acd\}$. Gráficamente se ve como sigue:



Trabajaremos con la filtración siguiente:

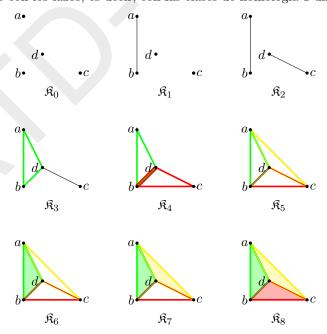


El complejo en cuestión es, topológicamente hablando, homeomorfo a un disco y por lo tanto su homología es trivial. Sin embargo, a través de los pasos de la filtración vemos momentos en que los grupos de homología no son triviales. Veamos cómo viajan la clase que contiene a a (en verde) y la clase que contiene a c (en morado) conforme la filtración avanza:



a siempre pertenece a una clase de homología 0- dimensional (es decir, una componente conexa) que va creciendo conforme la filtración avanza. Lo mismo sucede con c, hasta que se junta con la clase a. Antes de dicho momento ambas clases eran distintas, sin embargo, al juntarse sólo queda una clase. Éste es uno de los fenómenos que deseamos estudiar: cómo crecen las clases y cómo van algunas de ellas uniéndose a otras, hasta que al final sólo quedan las clases de la homología $\mathfrak K$. Hacer esto de forma apropiada requerirá un poco de cuidado.

Hagamos lo mismo con los lazos, es decir, con las clases de homología 1-dimensionales.



Es hasta \mathfrak{K}_3 que aparece un lazo, marcado con verde. Luego, en \mathfrak{K}_4 aparece un nuevo lazo marcado con rojo y posteriormente aparece un tercer lazo marcado con amarillo. En ningún momento estos lazos

son iguales, es decir, en ningún momento una clase absorbe a otra como ocurría con las componentes conexas anteriormente. Sin embargo, en \mathfrak{K}_6 aparece el primer triángulo, el cual vuelve trivial a una de las clases (la verde). Así podemos ver que esta clase desaparece, como sabemos debe ocurrir pues $H_1(\mathfrak{K}) = 0$, porque el ciclo que le representa se vuelve una frontera. Lo mismo ocurre con las otras clases, así que en este caso todas las clases desaparecen por la aparición de simplejos de mayor dimensión. Esta observación será relevante.

Podemos ver más fenómenos interesantes en este ejemplo: si a las clases de homología coloreadas las llamamos con la inicial del color que les dibuja (r, v, a), entonces el lazo que representa r+v+a (el perímetro del triángulo) aparece en \mathfrak{K}_5 y no desaparece hasta \mathfrak{K}_8 , pero paso a paso se va desintegrando, pues a cada momento uno de los ciclos que le representan se vuelve trivial.

Por lo tanto podemos cuestionarnos: ¿cuántas clases necesitamos entender para realmente comprender qué le ocurre a la homología durante la filtración? Es una pregunta relevante pues conocer la vida de las clases coloreadas implica que conocemos la vida de su suma, por lo que esta última no representa nueva información. Sin embargo, conocer el comportamiento de dos de estas clases coloreadas no dice nada sobre la clase restante, por lo que de cierta forma no es un panorama completo. Volveremos a este ejemplo y a esas cuestiones posteriormente en diversas ocasiones.

Ahora que hemos visto este ejemplo podemos proceder a dar la siguiente

DEFINICIÓN 85. Sea \Re un complejo simplicial y \Re la filtración $\Re_0 \subset \Re_1 \subset ... \subset \Re_m = \Re$. Definimos el (i,j)-ésimo grupo de homología persistente de nivel p como

$$H_{i,j;p}(\mathfrak{K},\mathfrak{F}) := Im(\iota_{i,j})_*.$$

A la dimensión de este espacio vectorial la denotamos por $\beta_{i,j;p}(\mathfrak{K},\mathfrak{F})$ y la llamamos el (i,j)-ésimo número de Betti persistente de nivel p.

- Observación 86. 1. Cuando no haya posible confusión denotaremos a $H_{i,j;p}(\mathfrak{K},\mathfrak{F})$ simplemente por $H_{i,j;p}$ o $H_{i,j}$ y a $\beta_{i,j;p}(\mathfrak{K},\mathfrak{F})$ por $\beta_{i,j;p}$ o $\beta_{i,j}$.
- 2. A veces es útil extender al caso en que i < 0 o j > m, y en tal caso se define que $H_{i,j} = 0$ para cualquier j. Nosotros tendremos oportunidad de usarlo en algunas ocasiones con i = -1 y con j = m + 1 para que las demostraciones no tengan que dividirse en partes.

Un caso particular importante es cuando i=j: en tal situación la inclusión $\iota_{i,i}:\mathfrak{K}_i\to\mathfrak{K}_i$ es la identidad por lo que $(\iota_{i,i})_*:H_p(\mathfrak{K}_i)\to H_p(\mathfrak{K}_i)$ también es la identidad. Por lo tanto, $\beta_{i,i;p}$ no es más que el p-ésimo número de Betti usual de K_i y $H_{i,i;p}=H_p(\mathfrak{K}_i)$. Como por lo general p suele ser fija, es decir, la dimensión de la homología con la que se está trabajando no cambia, en muchas ocasiones pondremos β_i o H_i para referirnos a $\beta_p(\mathfrak{K}_i)=\beta_{i,i;p}(\mathfrak{K},\mathfrak{F})$ y a $H_p(\mathfrak{K}_i)=H_{i,i;p}(\mathfrak{K},\mathfrak{F})$.

3. Persistencia: la historia de una clase

Hemos dicho que el objetivo principal de la persistencia es poder cuantificar de forma topológica el crecimiento de $\mathfrak K$ visto mediante la filtración dada. Esto lleva a analizar las siguientes cuestiones esenciales:

■ Hemos dicho que nos interesa estudiar el crecimiento de ℜ, pero para ello necesitamos decidir qué quiere decir que el objeto crezca. Los objetos que dictarán el crecimiento de ℜ son las clases de homología y la manera de determinar su crecimiento estará dado por la manera en que la filtración cambia. Estrictamente hablando, nunca daremos la definición de crecimiento sino de

- nociones relacionadas a partir de las cuales inferimos cómo ha crecido \mathfrak{K} . Dichas nociones son los ancestros, descendientes, tiempos de nacimiento y de muerte.
- Una vez que hayamos visto qué queremos decir con crecimiento podremos clasificar a las clases de acuerdo a dos características de su crecimiento: ¿cuánto viven? Esto será lo que llamaremos la persistencia de la clase; ¿en que momento viven? Esto es a lo que llamaremos la generación de la clase. Estos dos números nos darán coordenadas para entender el crecimiento de ℜ a través del tiempo.
- Finalmente, después de convencernos que la persistencia y las generaciones son buenos parámteros para guiar nuestro estudio querremos comprimir esta información en un buen resumen de toda la información recolectada. Esto lo llamaremos el diagrama de persistencia, y es la construcción de este objeto el objetivo fundamental de este capítulo. Su función será ser los epítomes de todo el crecimiento de £.

Ahora que hemos dicho las cuestiones esenciales pasemos a analizar informalmente la primera de ellas: supongamos $\alpha \in H_p(\mathfrak{K}_i)$ es una clase distinta de cero. Podemos pensar que α viaja en el tiempo (un tiempo discreto dado por la filtración) creando descendencia: $\alpha_1 = \iota_{i,i+1}(\alpha), \alpha_2 = \iota_{i,i+2}(\alpha) = \iota_{i+1,i+2}(\alpha_1), \dots$ Así, la familia generada por α viaja y nosotros podemos ver momentos específicos de su historia al escoger un tiempo fijo de la filtración. La única manera de detener este proceso es que $\alpha_j = 0$ para algún j, pues en ese momento, a pesar de que el cero siempre avanza al cero, la descendencia ha dejado de ser no trivial; o bien, que j = m y hayamos llegado al final de la filtración.

Hemos encontrado con esto un momento importante: el momento en que la clase muere al dejar de crear descendencia no trivial. Sin embargo, una clase no sólo tiene futuro sino que está dotada de un pasado, esto es, todas las clases que a lo largo del tiempo han tenido a α como descendencia en algún momento. Por lo tanto, la historia de α puede seguirse hacia el futuro, siempre generando un único descendiente en cada paso o hacía atrás formando un árbol que se ramifica de acuerdo a cuántos ancestros tuvo α en cada momento de su pasado (en los grupos de homología persistente previos a $H_p(\mathfrak{K}_i)$).

Sin embargo, los pasos hacía el pasado son finitos y por lo tanto α tendrá unos ancestros más antiguos, los que podríamos llamar: los *primeros ancestros*, y que son los primeros elementos de la familia que finalmente dará cabida a α .

Finalmente, aunque escondido, hay un tercer elemento fundamental para entender la familia de α . Los ancestros de α no tuvieron que aparecer en el mismo tiempo por primera vez, ni necesariamente α tiene que ser su primer descendiente común. Para dos de sus ancestros distintos siempre habrá un primer momento en que tengan un descendiente común, posiblemente en α . En ese momento dos familias distintas se unen, pero sólo una de ellas podrá transmitir su nombre (i.e. el nombre de su clase) a su descendencia. Esa familia es, por convención, la más antigua. A esta elección se le llama la regla de antiguedad. En el caso en que se unen dos familias, que aparecen en el mismo tiempo por primera vez, ninguna muere. Es decir, una familia que se une a otra sólo muere si aquella familia es más antigua. Es importante hacer notar que no definimos que una clase específica mate a otra, sólo decimos en que momento muere una clase sin asignar responsables.

Hemos detectado tres momentos clave para una clase:

- El momento en que aparecen sus ancestros más antiguos;
- el momento en que su descendencia se vuelve trivial por primera vez;

 el momento en que su descendencia se une con otra familia y sólo la más antigua transmite su nombre, es decir, sólo la más antigua persiste.

Estas tres características son las que entendemos como la esencia del crecimiento de \mathfrak{K} mediante \mathfrak{F} . Gracias a ellas justificamos el decir que la *homología persistente*, más que estudiar clases individuales, estudia la evolución de las clases.

Ahora procedamos a dar la definición formal de estos conceptos, esperando haberlos vuelto objetos naturales para estudiar. Recordemos que \mathfrak{K} es un complejo dado y \mathfrak{F} una filtración fija de \mathfrak{K} .

DEFINICIÓN 87. Decimos que la clase $\alpha \in H_p(\mathfrak{K}_i)$ nace en el tiempo i si $\alpha \notin H_{i-1,i;p}(\mathfrak{K},\mathfrak{F})$. Decimos que i es el tiempo de nacimiento de α .

Observación 88. Notemos que esta definición implica que la clase cero de algún grupo de homología nunca nace, pues siempre es la imagen de un elemento (el cero) del grupo de homología anterior.

Con esto podemos asociarle a una clase un tiempo de nacimiento y un ancestro más antiguo:

DEFINICIÓN 89. Decimos que la clase $\alpha \in H_p(\mathfrak{K}_i)$ es **ancestro** de la clase $\beta \in H_p(\mathfrak{K}_j)$, con $i \leq j$ si $\iota_{i,j}(\alpha) = \beta$. Dada una clase $\alpha \in H_p(\mathfrak{K}_i)$ definimos un **primer ancestro** como un ancestro de α cuyo tiempo de nacimiento es mínimo. Al tiempo de nacimiento de los primeros ancestros de α lo denotaremos por $n(\alpha)$.

- Observación 90. 1. Observe que no todas las clases nacen, esto es particular de las clases que son las primeras en aparecer de una familia (i.e. los primeros ancestros). También es importante ser consciente que los primeros ancestros no son únicos, aunque todos tienen el mismo tiempo de nacimiento.
- 2. Para que las clases cero también tengan un momento de nacimiento diremos que el cero nace $en -\infty$, es decir, que $n(0) = -\infty$. Así, el cero siempre puede ser ancestro de otras clases pero jamás el más antiquo.
- 3. Soleremos decir que la clase α nace en tiempo i si $n(\alpha) = i$.

DEFINICIÓN 91. Decimos que una clase $\alpha \in H_p(\mathfrak{K}_j)$, que nace en el tiempo i, **muere** en el tiempo j+1 si $\iota_{j,j+1}(\alpha) \in H_{i-1,j}$.

Observación 92. Nótese que no todas las clases mueren.

DEFINICIÓN 93. Decimos que la clase $\beta \in H_p(\mathfrak{K}_j)$ es **descendiente** de la clase $\alpha \in H_p(\mathfrak{K}_i)$, con $i \leq j$ si $\iota_{i,j}(\alpha) = \beta$. Al primer descendiente de una clase $\alpha \in H_p(\mathfrak{K}_i)$ que muere, en caso de existir, lo llamamos el **último descendiente** de α y a su tiempo de muerte lo denotamos por $m(\alpha)$. Si tal descendiente no existe pondremos $m(\alpha) = \infty$ y el último descendiente de α será $\iota_{i,m}(\alpha)$.

- Observación 94. 1. El nombre último descendiente puede confundir. Los descendientes del último descendiente de α son descendientes de α pero son descendientes triviales o que ya tienen un primer ancestro más antiguo que el primer ancestro de α .
- 2. Diremos que α muere en el tiempo $m(\alpha)$.

DEFINICIÓN 95. Decimos que una colección de clases $F = \{\alpha_i, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_j\}$ es una **familia** si se cumplen las siguientes tres condiciones:

• $\iota_{i,s}(\alpha_i) = \alpha_s$, para s = i + 1, ..., j,

- \bullet α_i es primer ancestro de α_i ,
- α_i es último descendiente de α_i .

Observación 96. El hecho de que α_j es último descendiente de α_i implica que es último descendiente α_s para s = i, ..., j. De la misma forma, el hecho de que α_i sea primer ancestro de α_j implica que es primer ancestro de α_s para s = i, ..., j.

Con esto concluimos el análisis del primer punto expuesto al principio: ¿A qué nos referimos con crecimiento? Ahora que hemos hecho preciso el concepto de nacimiento, muerte, ancestros y descendencia de clases, podemos pasar a analizar el segundo punto. Comenzamos con la siguiente

Definición 97. Sea $\alpha \in H_p(\mathfrak{K}_i)$ una clase no cero. Definimos la **persistencia** de α como

$$pers(\alpha) = m(\alpha) - n(\alpha).$$

 $Si\ m(\alpha) = \infty$, entonces definimos $pers(\alpha) = \infty$. Análogamente, si $F = \{\alpha_i, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_j\}$ es una familia, definimos la **persistencia** de F como

$$pers(F) = pers(\alpha_i)$$
.

Si $m(\alpha_j) = \infty$, entonces definimos $pers(F) = \infty$.

Observación 98. Note que por definición, si F es una familia, $pers(F) = pers(\alpha)$ para cualquier $\alpha \in F$. Además como el cero no pertenece a ninguna familia, la persistencia siempre está bien definida para las familias.

Claramente la persistencia define cuantitativamente que tan longeva es una clase. Será fundamental la idea que clases con persistencia chica no representan una cualidad importante en el crecimiento de $\mathfrak K$ sino más bien un fenómeno momentáneo que podrá clasificarse como ruido, en cambio, clases que persisten mucho tiempo, especialmente si no mueren, representan nociones fundamentales de $\mathfrak K$.

La otra noción importante es la generación. Ésta se define como sigue:

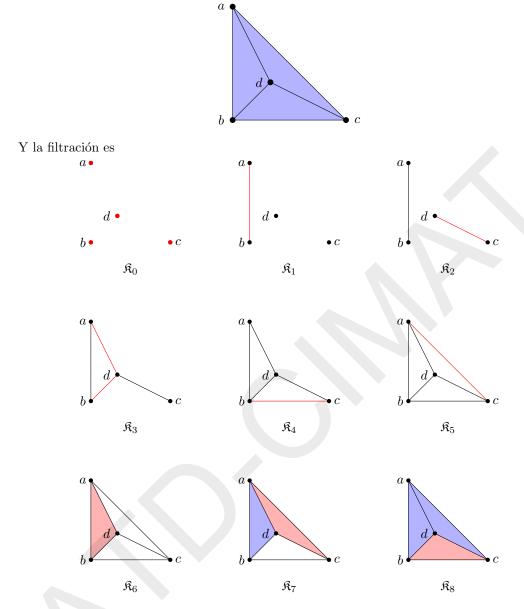
DEFINICIÓN 99. Decimos que una familia $F = \{\alpha_i, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_j\}$ es de **generación** (i, j). Decimos que una clase α es de **generación** (i, j) si pertenece a una familia de generación (i, j).

Observación 100. Una clase puede pertenecer a distintas familias, pero veremos más adelante que todas las familias a las que pertenece tienen la misma generación por lo que la generación de una clase está bien definida.

El concepto de generación está más arraigado a las familias que a las clases, pues dos clases de la misma generación, no necesariamente representan distintas familias ya que podrían pertenecer a la misma. Sin embargo, pensar un poco lo que se acaba de decir deja una interrogante: ¿Qué familias conforman una generación? Estrictamente hablando la definición responde a esta pregunta, sin embargo, queremos darle una noción de dimensión al conjunto de familias de la generación (i,j). La respuesta a estas pregunta será dada en una sección siguiente y su deducción nos llevará al teorema fundamental de la persistencia. Por el momento consideremos que lo que se ha dicho hasta ahora responde al análisis deseado del segundo punto.

4. Un ejemplo extenso

En esta sección estudiaremos más detalladamente el ejemplo iniciado en la sección 2. Seguiremos nuestra intuición pero mostraremos como las nociones que acabamos de definir solidifican nuestras predicciones. Recordemos que el complejo \mathfrak{K} es



Comenzaremos estudiando p=0, es decir, la topología de las componentes conexas. Recordemos que estos grupos de homología están representados por vértices y que dos vértices representan la misma clase si y sólo si están en la misma componente conexa. Aceptemos la convención de representar a cada componente por su menor vértice con respecto al orden lexicográfico. Tenemos lo siguiente:

$$H_0 = \mathbb{Z}_2[a] \oplus \mathbb{Z}_2[b] \oplus \mathbb{Z}_2[c] \oplus \mathbb{Z}_2[d],$$

$$H_1 = \mathbb{Z}_2[a] \oplus \mathbb{Z}_2[c] \oplus \mathbb{Z}_2[d],$$

$$H_2 = \mathbb{Z}_2[a] \oplus \mathbb{Z}_2[c],$$

$$H_i = \mathbb{Z}_2[a], i = 3, ..., 8.$$

Para $0 \le i \le j \le 8$, la inclusión $\iota_{i,j}: H_i \to H_j$ envía una clase, representada por un vértice v, a la clase que representa a la componente conexa que contiene a v en \mathfrak{K}_j , es decir $\iota_{i,j}([v]) = [v]$.

Usando esto, por ejemplo, tenemos que relativo a las bases dadas, $\iota_{0,1}(x,y,z,w) = (x+y,z,w)$ pues $\iota_{0,1}([a]) = \iota_{0,1}([b]) = [a]$, $\iota_{0,1}([c]) = [c]$ y $\iota_{0,1}([d]) = [d]$. De aquí es claro que $H_{0,1} = H_1$ de donde $\beta_{0,1} = 3$. Más generalmente concluímos que $\iota_{i,j}$ es suprayectivo en homología y por lo tanto

$$\beta_{i,j;0} = \dim \operatorname{Im}(\iota_{i,j;0}) = \dim H_j.$$

Como ya conocemos cada uno de los grupos $H_0, ..., H_8$ podemos conocer todos los números de Betti persistentes de nivel 0. Acomodados en forma matricial son

$i \mid j$	j = 0	j = 1	j=2	j = 3	j=4	j = 5	j = 6	j = 7	j = 8
i = 0	4	3	2	1	1	1	1	1	1
i = 1	*	3	2	1	1	1	1	1	1
i = 2	*	*	2	1	1	1	1	1	1
i = 3	*	*	*	1	1	1	1	1	1
i = 4	*	*	*	*	1	1	1	1	1
i = 5	*	*	*	*	*	1	1	1	1
i = 6	*	*	*	*	*	*	1	1	1
i = 7	*	*	*	*	*	*	*	1	1
i = 8	*	*	*	*	*	*	*	*	1

Podíamos predecir todo esto a partir de los dibujos, pero queremos enfatizar que los cálculos de álgebra lineal condensan nuestra intuición y la vuelven una realidad algebraica. Ahora veremos esto de manera mas contundente para cuando p=1.

Pecaremos de calculistas pero es importante enfatizar la estructura algebraica que sustenta toda la teoría, no sólo de manera teoríca sino de manera tangible y concreta. La siguiente parte del ejercicio será bastante explícita y un poco extendida para mostrar el desarrollo del que se obtienen los números de Betti persistentes.

Como en \mathfrak{K}_0 no hay caras de dimensión 1 o mayor, $H_0=0$. Esto a su vez implica que $\beta_{0,j;1}=0$ para j=0,1,...,8. Para i=1,2, a pesar de que hay caras de dimensión 1, no hay ningún ciclo por lo que $H_1=H_2=0$ y, por lo tanto, $\beta_{1,j;1}=0$ para j=1,2,...,8 y $\beta_{2,j;1}=0$ para j=2,3,...,8.

Para i=3,4,5 ya se presentan ciclos, pero todavía no hay caras de dimensión 2, por lo que tenemos que

$$H_i = \frac{Z_1(\mathfrak{K}_i)}{B_1(\mathfrak{K}_i)} = Z_1(\mathfrak{K}_i).$$

Por lo tanto, sólo hay que encontrar quién es el kernel del mapa frontera $\partial: C_1(\mathfrak{K}_i) \to C_0(\mathfrak{K}_i)$. Para i=3 podemos poner explícitamente:

$$\begin{split} \partial(\alpha ab + \beta bd + \gamma da + \delta dc) &= \alpha \partial(ab) + \beta \partial(bd) + \gamma \partial(da) + \delta \partial(dc) \\ &= \alpha(a+b) + \beta(b+d) + \gamma(d+a) + \delta(d+c) \\ &= (\alpha+\gamma)a + (\alpha+\beta)b + \delta c + (\beta+\gamma+\delta)d \\ &= 0, \end{split}$$

por lo que, al ser a, b, c, d base de las 0-cadenas, se sigue que

$$\alpha + \gamma = 0$$
$$\alpha + \beta = 0$$
$$\delta = 0$$
$$\beta + \gamma + \delta = 0,$$

que claramente es un sistema equivalente a:

$$\alpha + \gamma = 0$$
$$\alpha + \beta = 0$$
$$\beta + \gamma = 0.$$

A este sistema le corresponde la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

la cual tiene rango 2 porque el campo es \mathbb{Z}_2 . Su kernel tendrá dimensión 1 y estará generado por (1,1,1). Por lo tanto, la única cadena no trivial es ab+bd+da de donde $H_3=\mathbb{Z}_2[ab+bd+da]$ y $\beta_3=1$, tal como se ve en el dibujo.

Para i = 4 tenemos que el mapa frontera cumple

$$\partial(ab) = a + b,$$

$$\partial(bc) = b + c,$$

$$\partial(cd) = c + d,$$

$$\partial(ad) = a + d,$$

$$\partial(bd) = b + d.$$

Por lo tanto,

$$\partial = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mediante eliminación Gaussiana podemos verificar que tiene rango 3 y por lo tanto la dimensión de su kernel es 2. Dos elementos linealmente independientes en el kernel son (0,1,0,1,1) y (1,1,1,0,0) por lo que son una base. Notemos que estos elementos los sugerimos de acuerdo a los dos ciclos que vemos en el dibujo, la importancia de llevar a cabo los cálculos de álgebra lineal es que estamos rigurosamente seguros que no nos están faltando o sobrando elementos. Cuando los grupos en cuestión son más grandes, esto es muy importante, pues procesar información directamente del dibujo puede ser muy riesgoso y podemos omitir o repetir elementos. Todo esto muestra que

$$H_4 = \mathbb{Z}_2[ab + bd + ad] \oplus \mathbb{Z}_2[bc + cd + bd].$$

Para i=5 la base de 1-cadenas es ab,ac,ad,bc,bd,cd y por lo tanto

$$\partial = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene rango 3 y por lo tanto la dimensión del kernel es 3. Una base del kernel es (1,0,1,0,1,0), (0,0,0,1,1,1), (0,1,1,0,0,1) y por lo tanto,

$$H_5 = \mathbb{Z}_2[ab + ad + bd] \oplus \mathbb{Z}_2[bc + bd + cd] \oplus \mathbb{Z}_2[ac + ad + cd].$$

Para i = 6, 7, 8 ya aparecen caras de dimensión 2 y por lo tanto algunos 1-ciclos serán fronteras. Para todos estos casos los cálculos para determinar las 1-cadenas son los mismos que para i = 5, es decir, el kernel en todos estos casos tiene base (con coordenadas de acuerdo a ab, ac, ad, bc, bd, cd):

$$(1,0,1,0,1,0), (0,0,0,1,1,1), (0,1,1,0,0,1).$$

Las únicas cuentas nuevas que debemos hacer es ver cuáles de estos elementos son fronteras: para i=6 se tiene que

$$\partial(abd) = ab + ad + bd = (1, 0, 1, 0, 1, 0).$$

Observemos que en este caso la cuenta anterior calcula por completo las fronteras pues sólo hay una 2cadena. Las otras dos fronteras (0,0,0,1,1,1), (0,1,1,0,0,1) representan clases distintas en el cociente pues su diferencia es ac + ad + bc + bd que no es una frontera. Por lo tanto,

$$H_6 = \mathbb{Z}_2[bc + bd + cd] \oplus \mathbb{Z}_2[ac + ad + cd]$$

Análogamente se tiene que

$$H_7 = \mathbb{Z}_2[bc + bd + cd],$$
$$H_8 = 0.$$

Sin embargo, no hemos acabado, lo que hemos hecho hasta ahora nos dice quienes son los primeros grupos de homología de \mathfrak{K}_i , i=0,1,...,8 y por lo tanto sus números de Betti, $\beta_{i;1}$. Ahora necesitamos tomar en cuenta las inclusiones.

Lo que haremos primero será encontrar las matrices que representan a las inclusiones

$$\iota_{i,i+1}: H_i \to H_{i+1},$$

para i = 0, ..., 7. Para ello convendremos que las bases estarán dadas en el orden en que aparecen en las siguientes sumas (obviamente, en los espacios triviales no hay base que considerar):

$$H_0 = 0$$

 $H_1 = 0$
 $H_2 = 0$
 $H_3 = \mathbb{Z}_2[ab + bd + ad]$
 $H_4 = \mathbb{Z}_2[ab + bd + ad] \oplus \mathbb{Z}_2[bc + bd + cd]$
 $H_5 = \mathbb{Z}_2[ab + bd + ad] \oplus \mathbb{Z}_2[bc + bd + cd] \oplus \mathbb{Z}_2[ac + ad + cd]$
 $H_6 = \mathbb{Z}_2[bc + bd + cd] \oplus \mathbb{Z}_2[ac + ad + cd]$
 $H_7 = \mathbb{Z}_2[bc + bd + cd]$
 $H_8 = 0$.

Se tiene inmediatamente que $\iota_{0,1}, \iota_{1,2}, \iota_{2,3}$ todos son el mapa cero. Para $\iota_{3,4}$ veamos que le sucede a los elementos en las bases (recordemos que, por ser $\iota_{3,4}$ un mapa simplicial la imagen de una clase es la clase del 1-simplejo generado por la imagen de los vértices):

$$\iota_{3,4}(ab+bd+ad) = ab+bd+ad.$$

En otras palabras,

$$\iota_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

De manera completamente análoga:

$$\iota_{4,5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\iota_{5,6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\iota_{6,7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además $\iota_{7,8}=0$. De aquí podemos entender todos los mapas inclusión pues la composición de dos inclusiones es nuevamente una inclusión. Por ejemplo, entendamos qué sucede con $\iota_{4,7}$. Intuitivamente la imagen de dicho mapa tendrá dimensión 1, pues sólo uno de los ciclos muere. Para verificar esto podemos componer (o calcular en bases directamente):

$$\iota_{4,7} = \iota_{6,7} \circ \iota_{5,6} \circ \iota_{4,5}
= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tal como se esperaba. De aquí que el rango sea 1, es decir, $\beta_{4,7;1} = 1$. Siguiendo estos pasos pueden calcularse todos los números de Betti persistentes de nivel uno. Resumimos dichos números en la siguiente tabla:

$i\mid j$	j = 0	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	j = 5	j = 6	j = 7	j = 8
i = 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i = 1	*	0	0	0	0	0	0	0	0
i = 2	*	*	0	0	0	0	0	0	0
i = 3	*	*	*	1	1	1	0	0	0
i = 4	*	*	*	*	2	2	1	1	0
i = 5	*	*	*	*	*	3	2	1	0
i = 6	*	*	*	*	*	*	2	1	0
i = 7	*	*	*	*	*	*	*	1	0
i = 8	*	*	*	*	*	*	*	*	0

Finalmente para p=2 todos los grupos de homología son triviales, de donde todos los números de Betti persistentes de nivel dos son cero, es decir, $\beta_{i,j;2}=0$ para $0 \le i \le j \le 8$.

Habiendo visto este ejemplo esperamos haber logrado dos cosas: primero, mostrar cómo son los cálculos que se necesitan para poder encontrar los números de Betti persistentes, haciendo notorio que no son más que cuentas de álgebra lineal. Segundo, haber causado la inquietud de desarrollar un algoritmo más eficiente que el aquí mostrado, pues hasta ahora la única herramienta sólida que tenemos es hacer las cuentas completas y explotar las cualidades particulares del ejemplo en cuestión. En efecto, hay un algoritmo eficiente para calcular los números de Betti persistentes pero volveremos a eso hasta haber desarrollado más teoría.

5. Familias y generaciones

Ahora procederemos a entender mejor el concepto de familia. Más concretamente, lo que queremos lograr es asignar una dimensión al espacio de familias de una generación fija de manera semejante a la que se usa para asignar una dimensión a un espacio vectorial. Por ejemplo, a pesar de ser infinitos elementos en el plano sólo hay dos dimensiones linealmente independientes; a pesar de haber infinitas familias sólo habrá un número finito de familias «independientes».

Comenzaremos estableciendo notación para trabajar con familias de manera más sencilla:

NOTACIÓN 101. Si F es una familia de generación (i, j) denotaremos a sus elementos por $F_i, ..., F_j$ y llamaremos i = i(F) y j = f(F), la i por inicio de la familia y la f por final de la familia.

Observación 102. Los subíndices son de esta forma pues su objetivo es mostrar el grupo de homología al que pertenece la clase en cuestión, i.e, $F_s \in H_s$.

Comenzamos con la siguiente proposición, que justificará después la definición de familias independientes:

Proposición 103. Sean F y G dos familias y supongamos que tienen un elemento en común, entonces i(F) = i(G), f(F) = f(G). En particular, familias que se intersectan tienen la misma generación.

Demostración. Supongamos que $F_s = G_s$, para algunos $i(F) \le s \le f(F)$ y $i(G) \le s \le f(G)$. Se debe cumplir que el subíndice es el mismo, pues recordemos que dicho subíndice indica el grupo de homología al que la clase pertenece, i.e. $F_s, G_s \in H_p(\mathfrak{K}_s)$ y por la primera propiedad que define a las familias tendremos entonces que $F_{s+k} = G_{s+k}, k \ge 0$.

Como F es familia, $F_{f(F)}$ es el último descendiente de los elementos de la familia de F, en particular de $F_s = G_s$. Al mismo tiempo, como G es familia el último descendiente de los elementos de G es $G_{f(G)}$. Por lo tanto, $F_{f(F)}$ y $G_{f(G)}$ es el último descendiente de la clase $F_s = G_s$. Por unicidad del último descendiente, se tiene que $F_{f(F)} = G_{f(G)}$, y por lo tanto, f(F) = f(G).

Este argumento no funciona directamente para el primer ancestro pues estos no necesariamente son únicos. Lo que sabemos es que $F_{i(F)}$ y $G_{i(G)}$ son primeros ancestros de $F_s = G_s$, de donde i(F) = i(G), pues los primeros ancestros deben tener la misma antigüedad. De aquí que F y G son de generación (i(F), f(F)), concluyendo la demostración.

Observación 104. 1. Esta demostración justifica la definición de generación de una clase pues prueba que este concepto está bien definido.

2. Nótese que se usó fuertemente que las familias, a pesar de intersectarse, tienen primeros elementos iqual de antiquos. De lo contrario una de las dos debería persisitir y la otra morir.

Dada una clase que puede ser primer ancestro, la familia que le tiene como primer ancestro es única. Sin embargo, una clase que puede ser último descendiente puede tener asignadas varias familias de la que es último descendiente. Por lo tanto es justificable reducir la noción de independencia a las propiedades de los ancestros comunes de la familias, aunque por suerte podremos hacerlo también para los últimos descendientes.

DEFINICIÓN 105. Sea $0 \le i \le j \le m$ y \mathcal{F} una colección de familias de generación (i,j).

- 1. \mathcal{F} es inicialmente independiente si el conjunto $\{F_i|F\in\mathcal{F}\}$ es linealmente independiente sobre $H_{i-1,i}+\ker(\iota_{i,j})$.
- 2. \mathcal{F} es finalmente independiente si el conjunto $\{F_j|F\in\mathcal{F}\}$ es linealmente independiente sobre $H_{i-1,j}$.
- Observación 106. 1. Es claro que una familia inicialmente o finalmente independiente es finita, y que la cantidad de elementos que tiene no excede la dimensión del espacio que contiene a los elementos.
- 2. En esta definición estamos considerando que, para i = 0, $H_{-1,j} = 0$.

PROPOSICIÓN 107. Sea $0 \le i \le j \le m$ y \mathcal{F} una colección de familias de generación (i, j). \mathcal{F} es inicialmente independiente si y sólo si es finalmente independiente.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos ambas implicaciones. Como en cada caso supondremos que la familia \mathcal{F} es independiente de algún modo, sabemos que será finita, digamos $\mathcal{F} = \{F^1, ..., F^s\}$.

Comencemos suponiendo que \mathcal{F} es finalmente independiente y que

$$\lambda_1 F_i^1 + ... + \lambda_s F_i^s \in H_{i-1,i} + \ker(\iota_{i,j}),$$

entonces sabemos que existen $x \in H_{i-1,i}$ y $k \in \ker(\iota_{i,j})$ tales que

$$\lambda_1 F_i^1 + \dots + \lambda_s F_i^s = x + k,$$

de donde al aplicar ι_{ij} de ambos lados obtenemos

$$\lambda_1 F_i^1 + \dots + \lambda_s F_i^s = \iota_{i,j}(x) \in H_{i-1,j},$$

pues $x \in H_{i-1,i}$. Por lo tanto, dado que \mathcal{F} es finalmente independiente, se sigue que $\lambda_1 = ... = \lambda_j = 0$, probando la independencia sobre $H_{i-1,i} + \ker(\iota_{i,j})$.

Ahora supongamos que \mathcal{F} es inicialmente independiente y que

$$\lambda_1 F_j^1 + \ldots + \lambda_s F_j^s \in H_{i-1,j}.$$

Por lo tanto, existe un $x' \in H_{i-1}$ tal que

$$\iota_{i-1,j}(x') = \lambda_1 F_j^1 + \dots + \lambda_s F_j^s,$$

y a partir de él definamos $x = \iota_{i-1,i}(x') \in H_{i-1,i}$. Además sea $\alpha = \lambda_1 F_i^1 + \ldots + \lambda_s F_i^s$.

Sea $k = \alpha - x$, entonces

$$\iota_{ij}(k) = \iota_{ij}(\alpha - x)
= \iota_{ij}(\alpha) - \iota_{ij}(x)
= \iota_{ij}(\lambda_1 F_i^1 + \dots + \lambda_s F_i^s) - \iota_{i-1,j}(x')
= \lambda_1 F_j^1 + \dots + \lambda_s F_j^s - (\lambda_1 F_j^1 + \dots + \lambda_s F_j^s)
= 0,$$

de donde $k \in \ker(\iota_{ij})$. Por lo tanto, $\alpha = x + k \in H_{i-1,i} + \ker(\iota_{ij})$. Por definición de inicialmente independiente se sigue que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_s = 0$. Esto prueba que \mathcal{F} es finalmente independiente y concluye la prueba.

Observación 108. Es importante notar que la prueba funciona para el caso en que i=0.

La proposición anterior demuestra que ambos conceptos de independencia son equivalentes por los que nos referiremos a una familia que cumpla alguna de ellas simplemente como independiente. Además en ningún momento se utiliza que \mathcal{F} sea una colección de familias, por lo que la prueba funciona más generalmente. En particular, se tiene el siguiente corolario de la demostración

COROLARIO 109. Sea $0 \le i \le j \le m$ y \mathcal{F} una colección de familias de generación (i,j). \mathcal{F} es independiente si y sólo si $\{F_s|F\in\mathcal{F}\}$ es independiente sobre $H_{i-1,s}+\ker\iota_{s,j}$ para $i\le s\le j$.

Demostración. La demostración se sigue de aplicar la proposición anterior a s=i,i+1,...,j. \square

Observación 110. Obsérvese como para s = j se tiene que $H_{i-1,j} + \ker \iota_{j,j} = H_{i-1,j}$ pues $\iota_{j,j}$ es la identidad. Esto muestra que, a pesar de la primera impresión, la definición de independencia de familias es bastante simétrica.

Debemos notar que en la pruebas anteriores realmente no se usó que los elementos fueran ancestros más antiguos o últimos descendientes de familias, los argumentos funcionan tal cual para elementos de los espacios vectoriales apropiados. Lo único que tenemos que cuidar es que, en caso de hablar de independencia final, es que los elementos en cuestión pertenezcan a $H_{i,j}$. Escribimos esto en el siguiente

COROLARIO 111. Sea $\{x_1,...,x_s\} \subset H_i$ y $y_k = \iota_{i,j}(x_k)$. Se tiene que $x_1,...,x_s$ son linealmente independiendes sobre $H_{i-1,i} + \ker(\iota_{i,j})$ si y sólo si es $y_1,...,y_k$ es independiente sobre $H_{i-1,j}$. Esto a su vez es equivalente a que $\iota_{i,t}(x_1),...,\iota_{i,t}(x_s)$ sea independiente sobre $H_{i-1,t} + \ker(\iota_{t,j})$ para $i \leq t \leq j$.

Todo lo anterior justifica que demos la siguiente

DEFINICIÓN 112. Sean $0 \le i \le j \le m$. A la dimensión de H_i sobre $H_{i-1,i} + \ker \iota_{i,j}$, que es igual a la dimensión de $H_{i,j}$ sobre $H_{i-1,j}$, se le denota por $\theta_{i,j;p}$. Si no hay posibilidad de confusión los denotaremos simplemente por $\theta_{i,j}$

6. Generaciones y persistencia

A nosotros nos interesa la máxima cantidad de familias de generación (i, j) que son finalmente independientes. Por definición dicha cantidad es menor que $\theta_{i,j}$ pero no tiene porque ser igual, pues la condición de ser familia requiere que los últimos descendientes tengan imagen en $H_{i-1,j}$, lo que agrega condiciones lineales sobre los elementos.

DEFINICIÓN 113. A la máxima cantidad de familias independientes de generación (i, j) se le denota por $\mu_{i,j}$ y lo llamamos la dimensión de la generación (i,j).

El siguiente teorema es fundamental para la interpretación posterior de los diagramas de persistencia:

Teorema 114. Si $0 \le i \le j < n$ cumple que

$$\mu_{i,j} = \beta_{i,j} - \beta_{i,j+1} - (\beta_{i-1,j} - \beta_{i-1,j+1}).$$

Además,

$$\mu_{i,n} = \beta_{i,n} - \beta_{i-1,n}.$$

Demostración. La siguiente demostración funciona igual de bien para cualquier j, haciendo los grupos de homología apropiados cero, cuando j+1>n o i-1<0) La siguiente notación será importante: Sea $T=\iota_{j,j+1}:H_{i,j}\to H_{i,j+1}$ y $S=\iota_{j,j+1}:H_{i-1,j}\to H_{i-1,j+1}$. Es fácil notar que $\ker S=\ker T\cap H_{i-1,j}$.

Consideremos una colección independiente de familias $F^1,...,F^s$ de generación (i,j) y recordemos que esto significa que $F^1_j,...,F^s_j$ es linealmente independiente sobre $H_{i-1,j}$. Como F^k es el último descendiente entonces muere entrando en tiempo j+1, lo que significa que $\iota_{j,j+1}(F^k_j) \in H_{i-1,j+1}$, digamos que $\iota_{j,j+1}(F^k_j) = \iota_{i-1,j+1}(x^k)$ para algún $x_k \in H_{i-1}$. Por lo tanto se cumplirá que

$$T(F_i^k - \iota_{i-1,j}(x^k)) = 0,$$

y entonces $F_j^k - \iota_{i-1,j}(x^k) \in \ker T$, o en otras palabras, $F_j^k \in \ker T + H_{i-1,j}$.

Hemos demostrado que $F_j^1, ..., F_j^s$ forman un conjunto linealmente independiente sobre $H_{i-1,j}$ dentro de $\ker T + H_{i-1,j}$ y por lo tanto su dimensión no puede exceder la dimensión de $\ker T + H_{i-1,j}$ sobre $H_{i-1,j}$. Se sigue que

$$s \leq \dim(\ker T + H_{i-1,j}) - \dim(H_{i-1,j})$$
$$= \dim \ker T - \dim(\ker T \cap H_{i-1,j})$$
$$= \dim \ker T - \dim(\ker S).$$

Sin embargo, como $T = \iota_{j,j+1} : H_{i,j} \to H_{i,j+1}$ es suprayectiva, pues $\iota_{j,j+1}(H_{i,j}) = H_{i,j+1}$, se sigue del teorema de la dimensión que

$$\dim \ker T = \dim H_{i,j} - \dim H_{i,j+1} = \beta_{i,j} - \beta_{i,j+1}.$$

y usando un argumento similar para S se obtiene que

$$\dim \ker S = \dim H_{i-1,j} - \dim H_{i-1,j+1} = \beta_{i-1,j} - \beta_{i-1,j+1}.$$

Sustituyendo estas igualdades en la desigualdad obtenida para s se concluye que

$$s \leq \beta_{i,j} - \beta_{i,j+1} - (\beta_{i-1,j} - \beta_{i-1,j+1}).$$

Esto prueba que la cantidad de familias independientes de generación (i, j) no puede exceder a $\beta_{i,j} - \beta_{i,j+1} - (\beta_{i-1,j} - \beta_{i-1,j+1})$. Ahora sólo debemos demostrar que hay una colección con tal cantidad de elementos. De los cálculos anteriores hemos comprobado que

$$\beta_{i,j} - \beta_{i,j+1} - (\beta_{i-1,j} - \beta_{i-1,j+1}) = \dim(\ker T + H_{i-1,j}) - \dim(H_{i-1,j}).$$

Consideremos un subconjunto maximal de $\ker T + H_{i-1,j}$ linealmente independiente sobre $\dim(H_{i-1,j})$, digamos $y_j^1,...,y_j^s$. Como $\ker T + H_{i-1,j} \subset H_{i,j}$ existen elementos $y_i^1,...,y_i^s$ en H_i con $\iota_{i,j}(y_i^k) = y_j^k$. Tomemos el conjunto de clases $F^k = \{y_1^k, y_2^k, ..., y_j^k\}$, donde $y_t^k = \iota_{i,t}(y_i^k)$ para k = 1,...,j. Probaremos que F^k es familia para cada k.

Como y_j^k pertenece a un conjunto linealmente independiente sobre dim $H_{i-1,j}$, no puede pertenecer el mismo a $H_{i-1,j}$ de donde cualquier ancestro de y_j^k pertenece a $H_i, H_{i+1}, ..., H_j$. En consecuencia y_i^k es un ancestro de y_j^k tan antiguo como es posible, de donde se sigue que es un primer ancestro

Por otra parte, como $y_k^j = t_k + h_k$, donde $t_k \in \ker T$ y $h_k \in H_{i-1,j}$ se sigue que

$$\iota_{j-1,j}(y_k^j) = \iota_{j-1,j}(t_k + h_k)$$

$$= T(t_k + h_k)$$

$$= T(h_k)$$

$$\in H_{i-1,j+1},$$

por lo que el elemento $T(h_k)$ tiene al menos un ancestro en H_{i-1} (que bien podría ser el cero), y por lo tanto más antiguo que y_i^k lo que implica que y_j^k muere en tiempo j+1. Sin embargo, no puede ser que y_j^k no sea el primer descendiente de y_i^k que muera, pues de lo contrario habría un elemento y_i^k con $i \le t < j$ con un ancestro más antiguo que y_i^k y esto contradice que y_1^k sea primer ancestro de y_j^k . Por lo tanto, y_j^k es último descendiente de y_i^k . Esto prueba que F^k es familia.

Hemos demostrado que $F^1, ..., F^s$ son todas familias y son finalmente independientes, por construcción, se sigue que hay una colección independiente de familias de generación (i, j) de longitud $\beta_{i,j} - \beta_{i,j+1} - (\beta_{i-1,j} - \beta_{i-1,j+1})$ y como este es la máxima cantidad hemos demostrado que

$$\mu_{i,j} = \beta_{i,j} - \beta_{i,j+1} - (\beta_{i-1,j} - \beta_{i-1,j+1}),$$

como queríamos demostrar.

Para ver en dónde radica la importancia de lo que acabamos de demostrar consideremos el caso hipótetico en que tenemos una filtración $\mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}$. En este caso tendremos los siguientes números de Betti persistentes: $\beta_{0,0}$, $\beta_{0,1}$, $\beta_{0,2}$, $\beta_{1,1}$, $\beta_{1,2}$, $\beta_{1,3}$ y las siguientes dimensiones para las generaciones $\mu_{0,0}$, $\mu_{0,1}$, $\mu_{0,2}$, $\mu_{1,1}$, $\mu_{1,2}$, $\mu_{2,2}$. El teorema anterior nos indica que

$$\mu_{0,0} = \beta_{0,0} - \beta_{0,1},$$

$$\mu_{0,1} = \beta_{0,1} - \beta_{0,2},$$

$$\mu_{0,2} = \beta_{0,2},$$

$$\mu_{1,1} = \beta_{1,1} - \beta_{1,2} - \beta_{0,1} + \beta_{0,2},$$

$$\mu_{1,2} = \beta_{1,2} - \beta_{0,2},$$

$$\mu_{2,2} = \beta_{2,2} - \beta_{1,2}.$$

Esto puede acomodarse en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} \mu_{0,0} \\ \mu_{0,1} \\ \mu_{0,2} \\ \mu_{1,1} \\ \mu_{1,2} \\ \mu_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{0,0} \\ \beta_{0,1} \\ \beta_{0,2} \\ \beta_{1,1} \\ \beta_{1,2} \\ \beta_{2,2} \end{pmatrix}$$

Podemos proceder con eliminación gaussiana como sigue: sumamos el renglón 2 al 4, el renglón 3 al 5, y posteriormente el renglón 5 al 6. Eso nos lleva a que la matriz de 6×6 mostrada es similar a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde vemos que el determinante de la matriz es 1 y por tanto es invertible. De hecho, la inversa está dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, tenemos la relación,

$$\beta_{0,0} = \mu_{0,0} + \mu_{0,1} + \mu_{0,2},$$

$$\beta_{0,1} = \mu_{0,1} + \mu_{0,2},$$

$$\beta_{0,2} = \mu_{0,2},$$

$$\beta_{1,1} = \mu_{0,1} + \mu_{0,2} + \mu_{1,1} + \mu_{1,2},$$

$$\beta_{1,2} = \mu_{0,2} + \mu_{1,2},$$

$$\beta_{2,2} = \mu_{0,2} + \mu_{1,2} + \mu_{2,2}.$$

El objetivo de la siguiente sección será mostrar que esto no es una coincidencia y que siempre se pueden despejar los números de Betti en términos de las dimensiones generacionales.

7. El algoritmo de reducción

En la última parte de la sección anterior mencionamos brevemente que podíamos invertir una matriz mediante la eliminación gaussiana, ahora estudiaremos el proceso paso por paso de manera general. Primero acordemos poner el orden lexicográfico para ordenar a los números de Betti persistentes y a las dimensiones generacionales, es decir, el subíndice (i,j) precede al (r,s) si i < r o si i = r y j < s. Siguiendo este orden denotemos por

$$\beta = (\beta_{0,0}, ..., \beta_{0,n}, \beta_{1,1}, ..., \beta_{1,n}, ..., \beta_{n,n})^T, \ \mu = (\mu_{0,0}, ..., \mu_{0,n}, \mu_{1,1}, ..., \mu_{1,n}, ..., \mu_{n,n})^T.$$

El teorema anterior nos permite expresar al vector μ linealmente en términos del vector β , mediante una matriz que llamaremos R. Es decir, se cumple

$$\mu = R\beta$$
.

Al renglón de R que corresponde a la combinación de $\mu_{i,j}$ lo llamaremos el renglón (i,j) y lo denotaremos por R(i,j). Observemos que R(i,j) siempre tiene un 1 en la diagonal pues la expresión de $\mu_{i,j}$ utiliza a $\beta_{i,j}$, a lo más tiene un elemento (que será un -1) a la derecha de la diagonal correspondiente a $\beta_{i,j+1}$, en caso de que dicho elemento se utilice que es precisamente cuando j < n. A la izquierda de la diagonal puede tener cero elementos si i = 0, un elemento si i > 0 y j = n o dos elementos si i > 0 y j < n. Nuestro objetivo será utilizar esta estructua para eliminar todos los elementos debajo de la diagonal.

La observación esencial es: para cualquier renglón R(i,j), i>0, siempre existirá un renglón anterior, con ceros antes de la diagonal y tal que al sumársele a R(i,j) elimina todos los elementos antes de la diagonal. Este renglón asociado a R(i,j) puede haber sido modificado en un paso anterior de la eliminación Gaussiana. Si ahora regresamos a verificar el ejemplo de la sección anterior vimos que este fue precisamente el proceso que seguimos para llevar a R a una matriz triangular con únicamente unos en la diagonal principal.

Sigamos este proceso ordenadamente: para los renglones con i=0 no necesitamos hacer nada pues no presentan elementos no nulos a la izquierda de la diagonal principal. Para i=1 las ecuaciones que determinan el comportamiento de los renglones R(1,j), j=1,2,...,n son

$$\mu_{1,j} = \beta_{1,j} - \beta_{1,j+1} - \beta_{0,j} + \beta_{0,j+1}, 1 \le j < n,$$

$$\mu_{1,n} = \beta_{1,n} - \beta_{0,n}.$$

Vistas en el orden en que aparecen sus entradas en los renglones son

$$\mu_{1,j} = -\beta_{0,j} + \beta_{0,j+1} + \beta_{1,j} - \beta_{1,j+1}, 1 \le j < n,$$

$$\mu_{1,n} = -\beta_{0,n} + \beta_{1,n}.$$

Los renglones que corresponden a i = 0 son

$$\mu_{0,j} = \beta_{0,j} - \beta_{0,j+1}, 0 \le j < n$$

$$\mu_{0,n} = \beta_{0,n}.$$

De donde es claro que sumar el renglón R(0,j) al R(1,j) cancela únicamente lo que está precisamente antes de la diagonal y deja el resto intacto. Para el siguiente, i=2, tenemos

$$\mu_{2,j} = -\beta_{1,j} + \beta_{1,j+1} + \beta_{2,j} - \beta_{2,j+1}, 2 \le j < n,$$

$$\mu_{2,n} = -\beta_{1,n} + \beta_{2,n}.$$

Aquí vemos que lo que está antes de la diagonal en R(2,j) se cancela precisamente con lo que está después o en la diagonal en R(1,j), que es precisamente la parte que ha quedado sin alterar al hacer la eliminación gaussiana a los renglones con i=1. Por lo tanto, hacer estas sumas elimina todo lo que está antes de la diagonal de R(2,j) y lo demás lo deja intacto.

Podemos llevar este proceso de manera inductiva: Los renglones R(i,j) están dados para i>1 por

$$\mu_{i,j} = -\beta_{i-1,j} + \beta_{i-1,j+1} + \beta_{i,j} - \beta_{i,j+1}, i \le j < n,$$

$$\mu_{i,n} = -\beta_{i-1,n} + \beta_{i,n},$$

cuyas partes antes de la diagonal se cancelan al sumarles los renglones R(i-1,j) pues dichos renglones ya no tienen nada antes de la diagonal, por hipótesis inductiva, y el resto se ha mantenido intacto y por ende coincide con lo que aparece en las ecuaciones

$$\mu_{i-1,j} = -\beta_{i-1,j} + \beta_{i-1,j+1} + \beta_{i,j} - \beta_{i,j+1}, i-1 \le j < n,$$

$$\mu_{i-1,n} = -\beta_{i-2,n} + \beta_{i-1,n},$$

y éstas precisamente cancelan lo que aparece antes de la diagonal y dejan el resto intacto. Iterando este proceso para i = 0, 1, 2, ..., n obtenemos el siguiente

Teorema 115. Sea R la matriz que relaciona a β con μ , entonces el algoritmo:

- Para i = 1, ..., n
 - Para j = i, i + 1, ..., n suma el renglón R(i 1, j) al renglón R(i, j).

transforma la matriz R a una matriz triangular superior equivalente \widetilde{R} con únicamente unos en la diagonal.

Demostración. Ya hemos probado que el algoritmo en efecto transforma a R en una matriz triangular superior equivalente (es equivalente porque son pasos de eliminación gaussiana). El hecho de que sean unos en la diagonal se sigue de que la diagonal nunca se afecta en estos pasos y la matriz R tenía una diagonal de puros unos.

Se tiene inmediatamente el siguiente

COROLARIO 116. La matriz R cumple det(R) = 1 y por lo tanto es invertible.

Con esto hemos justificado que el proceso que vimos al final de la sección anterior no es coincidencia sino un proceso general. El proceso hasta ahora es suficiente para que podamos invertir la matriz y despejar el vector β , sin embargo quisieramos más. Dado que tenemos tan buen control de lo que le ocurre a la matriz R hasta ahora quizá podamos llevar suficiente control para reducirla por completo a la identidad. Esto sería magnífico pues entonces estos mismos pasos hechos a la identidad nos darán la inversa R^{-1} .

Como el algoritmo de reducción hasta ahora ha dejado intacto todo lo que ocurre de la diagonal a la derecha este pedazo coincide con el de R. Para un i fijo veamos todas las ecuaciones de las que obtenemos los renglones de R son:

$$\mu_{i,i} = -\beta_{i-1,i} + \beta_{i-1,i+1} + \beta_{i,i} - \beta_{i,i+1}$$

$$\mu_{i,i+1} = -\beta_{i-1,i+1} + \beta_{i-1,i+2} + \beta_{i,i+1} - \beta_{i,i+2}$$

$$\mu_{i,i+2} = -\beta_{i-1,i+2} + \beta_{i-1,i+3} + \beta_{i,i+2} - \beta_{i,i+3}$$

$$\vdots$$

$$\mu_{i,n-1} = -\beta_{i-1,n-1} + \beta_{i-1,n} + \beta_{i,n-1} - \beta_{i,n}$$

$$\mu_{i,n} = -\beta_{i-1,n} + \beta_{i,n}$$

El elemento que está en la diagonal en el renglón R(i,j) es precisamente el negativo del que está a la derecha de la diagonal en el renglón (i,j-1). Como esa parte de la matriz no ha sufrido cambios esto sigue siendo cierto en \widetilde{R} . Por lo tanto, sumamos el renglón R(i,n) al R(i,n-1) con lo que dejaremos este último únicamente con un uno en la diagonal (o sea, la diagonal no sufrió cambios).

Luego sumamos R(i, n-1) a R(i, n-2) y el elemento de la diagonal del primer renglón cancela lo que queda fuera de la diagonal del segundo, dejando así únicamente un 1 en la diagonal. Así, este proceso de sumar de abajo hacia arriba los renglones R(i, i), ..., R(i, n) nos lleva a la matriz identidad como queríamos. Hemos probado la segunda parte del algoritmo:

Teorema 117. Si a la matriz \widetilde{R} , construida en la primera parte del algoritmo, se le efectúan las operaciones elementales

- Para i = 0, 1, ..., n
 - Para j = n 1, ..., 0 suma el renglon R(i, j + 1) al renglón R(i, j)

se obtiene la matriz identidad.

Ahora procederemos a entender qué le hacen estos mismos pasos a la matriz identidad (de las mismas dimensiones qu R). Primero observemos qué le ocurre después de la primera parte del algoritmo. En dicha parte, si i>0 el renglón I(i,j) sólo se modifica una única vez, que es cuando se le ha sumado el renglon I(i-1,j). Este renglón a su vez sólo ha sido modificado una única vez: cuando se le sumó el renglón I(i-2,j), y así sucesivamente hasta que llegamos al momento en que al renglón I(1,j) se le suma I(0,j) y a este úlitmo no se le hace nada en el algoritmo. En otras palabras, el renglón I(i,j) se ha sustituido con la suma I(0,j)+I(1,j)+...+I(i,j). Por lo tanto, el renglón I(i,j) de la matriz I, que se obtiene de I después de la primera parte del algoritmo, tiene unos en las entradas I(0,j), I(1,j), ..., I(i,j) y cero en el resto.

Por ejemplo, para el caso en que n=2 la matriz que se obtiene es:

$$\widetilde{I} = egin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

como puede comprobarse si se siguen los pasos de la eliminación Gaussiana dados en el algoritmo, y que son los que seguimos cuando vimos este ejemplo en la sección anterior.

A la matriz \widetilde{I} debe aplicársele la segunda parte del algoritmo. En esta ocasión si j < n el renglón $\widetilde{I}(i,j)$ sólo se ha modificado una vez cuando se le suma $\widetilde{I}(i,j+1)$. Este renglón a su vez viene de sumarle el renglón $\widetilde{I}(i,j+2)$, y así sucesivamente hasta llegar que al renglón $\widetilde{I}(i,n-1)$ sólo se le suma el renglón $\widetilde{I}(i,n)$, al cual no se le hace nada en esta parte del algoritmo. Por lo tanto, el renglón $\widetilde{I}(i,j)$ se ha sustituido por la suma (de renglones originales de \widetilde{I}) siguiente: $\widetilde{I}(i,j) + \widetilde{I}(i,j+1) + ... + \widetilde{I}(i,n)$.

De acuerdo a lo que vimos al construir \widetilde{I} , el renglón $\widetilde{I}(i,j)$ tiene unos en las siguientes posiciones: $(0,j),\,(1,j),\,...,\,(i,j)$ y ceros en el resto. Conforme j varia en i,i+1,...,n estos unos nunca coinciden. Por lo tanto, la suma $\widetilde{I}(i,j)+\widetilde{I}(i,j+1)+...+\widetilde{I}(i,n)$ produce un renglón con únicamente ceros y unos, estos últimos en las posiciones:

$$\begin{pmatrix} (0,j) & (1,j) & \cdots & (i,j) \\ (0,j+1) & (1,j+1) & \cdots & (i,j+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (0,n) & (1,n) & \cdots & (i,n) \end{pmatrix}$$

Con esto vemos cómo son los renglones de la matriz obtenida al terminar el algoritmo en \widetilde{I} y cómo esto termina el proceso y ha llevado R a la identidad, entonces la matriz así obtenida es R^{-1} . Por ejemplo, dijimos que la inversa en el caso n=2 es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

que precisamente tiene los unos en las posiciones predichas.

Englobamos todo este en el siguiente

TEOREMA 118. La matriz R que relaciona a los vectores μ y β es invertible, con $\det(R) = 1$, y su inversa es la matriz R^{-1} cuyo renglón (i, j) tiene unos en las posiciones

$$\begin{pmatrix} (0,j) & (1,j) & \cdots & (i,j) \\ (0,j+1) & (1,j+1) & \cdots & (i,j+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (0,n) & (1,n) & \cdots & (i,n) \end{pmatrix}$$

y cero en todas las demás posiciones.

Observación 119. No queremos causar confusión con la manera en que está escrita esta proposición. Sólo hemos puesto los subíndices en forma matricial para que sea claro como sumar los subíndices más adelante, no hay ninguna matriz bajo consideración.

Gracias a este teorema podemos enunciar un corolario, aunque lo llamaremos teorema de todos modos, pues es el llamado

TEOREMA 120 (Teorema fundamental de la homología persistente). Los números de Betti pueden obtenerse a partir de las dimensiones generacionales linealmente mediante

$$\beta_{i,j;p} = \sum_{k \le i} \sum_{l \ge j} \mu_{k,l;p}.$$

8. Diagramas de persistencia

Finalmente estamos listos para construir los diagramas de persistencia cuya función es servir de resumen de las propiedades topológicas que se observan durante el crecimiento del complejo $\mathfrak K$ mediante la filtración $\mathfrak F$. La información topológica que se codificará será la dada por las dimensiones generacionales que, gracias al teorema fundamental, es equivalente a la información que podríamos obtener mediante los números de Betti persistentes.

Ahora daremos el algoritmo para construir estos diagramas de persistencia:

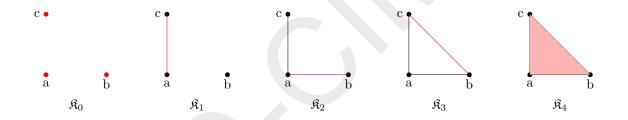
- Seleccionar $0 \le p \le n$. Esto se hará para construir el diagrama que codifica la información asociada a la homología p-dimensional.
- Seleccionar $1 \le i < j \le \infty$ y marcar en el plano $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ el punto (i, j + 1), donde n + 1 se marca en ∞ si $\mu_{i,j} > 0$.
- Asignarle multiplicidad $\mu_{i,j}$ al punto (i, j + 1) si este punto fue marcado. La multiplicidad se marca en el diagrama escribiendo $\mu_{i,j}$ al lado del punto (i, j + 1).

■ Dibujar la diagonal x = y y considerar que cada uno de sus puntos tiene multiplicidad infinita (esto se hace con el objetivo de simplificar un tecnicismo posterior).

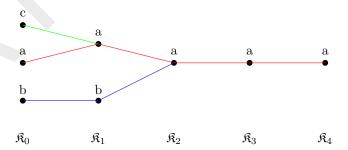
Para ejemplificar cómo se hacen estos diagramas veamos un ejemplo sencillo. Nuestro complejo, que ya hemos visto antes, será $\mathfrak{K} = \Delta_2$, a cuyos vértices los llamaremos a, b y c. Los complejos de la filtración estarán dados como sigue:

- $\mathfrak{K}_0 = \{a, b, c\},\$
- $\mathbf{\mathfrak{K}}_1 = \{a, b, c, ac\},\$
- $\Re_2 = \{a, b, c, ac, ab\},\$
- $\blacksquare \ \mathfrak{K}_3 = \{a, b, c, ac, ab, bc\},\$
- $\Re_4 = \{a, b, c, ac, ab, bc, abc\}.$

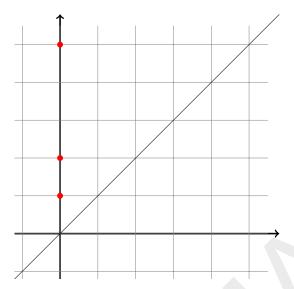
Gráficamente se ve como sigue:



Como sólo hay simplejos de dimensiones 0, 1 y 2 únicamente habrá diagramas de persistencia para esos valores. Comencemos viendo el caso p = 0. El árbol de crecimiento en este caso es:



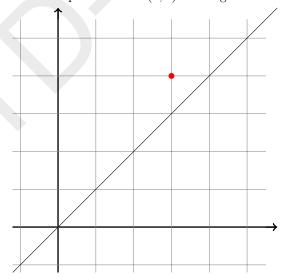
De aquí concluimos que las dimensiones generacionales son $\mu_{0,0;0} = 1$, $\mu_{0,1;0} = 1$, $\mu_{0,4;0} = 1$ y el resto son cero. Por lo tanto, el diagrama de persistencia $Diag(\mathfrak{K},\mathfrak{F})_0$ tendrá únicamente tres puntos en (0,1),(0,2) y $(0,\infty)$, todos ellos de multiplicidad 1. En consecuencia el diagrama es



Hemos utilizado la recta y=5 para representar la recta que corresponde al infinito. Ahora veamos el árbol de crecimiento para p=1:



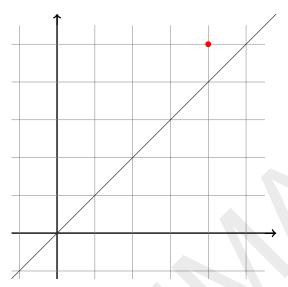
Aquí γ es la clase en $H_1(\mathfrak{K}_3)$ representada por ab+bc+ca. De este árbol obtenemos que las dimensiones generacionales son $\mu_{3,3;1}=1$ y el resto cero. Por lo tanto, el diagrama de persistencia tendrá únicamente un punto de multiplicidad 1 en (3,4). El diagrama es



Finalmente para p=2 el árbol de crecimiento es

ullet abc $ar{\kappa}_0$ $ar{\kappa}_1$ $ar{\kappa}_2$ $ar{\kappa}_3$ $ar{\kappa}_4$

Por lo tanto la única generción no nula es (4,4), o sea, clases inmortales que nacen en el tiempo 4. Tenemos $\mu_{4,4;2} = 1$, de donde el diagrama tiene un único punto en $(4,\infty)$ (que nosotros dibujamos en (4,5)):



Observación 121. No nos dejemos llevar por lo escueto de los diagramas, la razón de ser de esto es que hemos escogido un ejemplo casi trivial. Por lo general los diagramas en la práctica tienen miles de puntos.

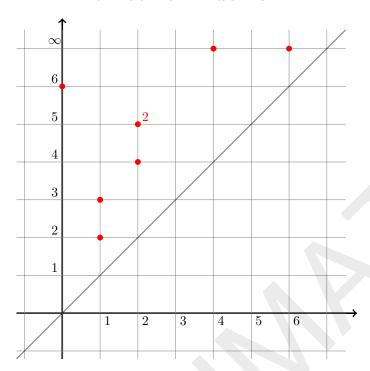
Ahora que hemos visto la construcción de los diagramas pasemos a entender cómo leer los números de Betti persistentes a partir de ellos. La clave de esta lectura la da el teorema fundamental, el cuál dice

$$\beta_{i,j;p} = \sum_{k \le i} \sum_{l \ge j} \mu_{k,l;p}.$$

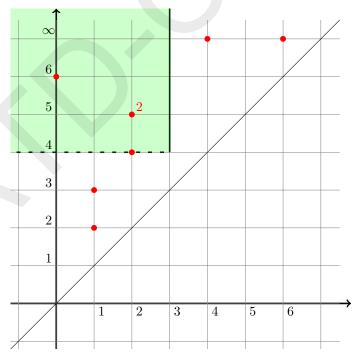
Si $k \leq i$ y $l \geq j$ es tal que $\mu_{k,l;p} > 0$ entonces el punto (i,j+1) se ha marcado con tal multiplicidad. Por lo tanto, todas las dimensiones generacionales que contribuyen en la suma anterior aparecen en el cuadrante dado por $x \leq i, y > j$. Viceversa, si hay un punto en ese cuadrante marcado con multiplicidad $\mu_{k,l;p} > 0$, entonces dicha dimensión aparece como sumando en la suma dada por el teorema. Este breve análisis nos ha dado la prueba de la siguiente

PROPOSICIÓN 122. El número de Betti persistente $\beta_{i,j;p}$ coincide con la cantidad de puntos, tomando en cuenta la multiplicidad, que hay en el p-ésimo diagrama de persistencia dentro del cuadrante $x \leq i, y > j$. En particular, el p-ésimo número de Betti de \mathfrak{K}_i coincide con la cantidad de puntos, tomando en cuenta multiplicidad, en el cuadrante $x \leq i, y > i$.

Para ejemplificar esta lectura supongamos que para alguna filtración hipotética de 7 pasos (i.e, $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_6$) un diagrama de persistencia se ve como sigue:



La recta y=7 se piensa como los puntos en infinito y los números en rojo son los que indican multiplicidades. Calculemos $\beta_{3,4;p}$ para este diagrama: de acuerdo a la interpretación que hemos dado serán la cantidad de puntos dentro del cuadrante $i\leq 3, j>4$. Dicho cuadrante se marca en el siguiente diagrama:

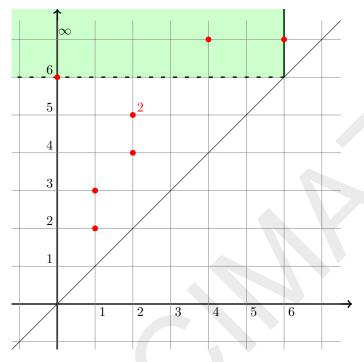


Por lo tanto,

$$\beta_{3,4;p} = 2 + 1 = 3,$$

pues en ese cuadrante sólo hay un punto de mutiplicidad 2 y otro de multiplicidad 1.

Si ahora deseamos encontrar el p-ésimo número de Betti de $\mathfrak K$ tenemos que hacer el proceso anterior para i=j=6. El cuadrante en ese caso es



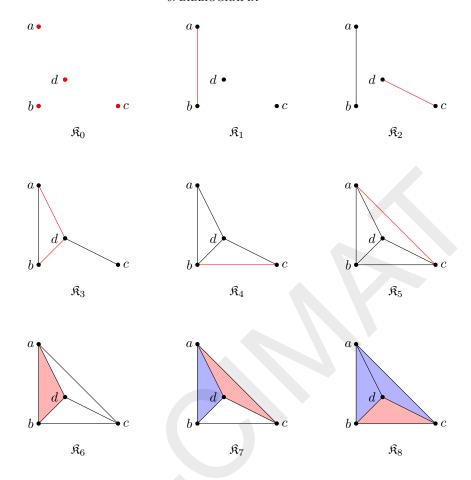
Por lo tanto,

$$\beta_{6,6;p} = 2.$$

9. Bibliografía

Para este capítulo se han revisado los siguientes textos:

Computational Topology, An Introduction. Herbert Edelsbrunner, John Harer: El segundo capítulo de estas notas son un esfuerzo por explicar rigurosamente los temas expuestos en la primera sección del séptimo capítulo. Menciono esto pues quiero enfatizar que el teorema fundamental de la homología persistente aparece en este texto en la página 181 con una explicación muy breve y que, a mi parecer, es vaga. La razón de esto es que aquí se justifica la ecuación 114 mediante un proceso de inclusión y exclusión que, a mi parecer, deja de lado el papel fundamental de las dimensiones. Es decir, en este texto se define $\mu_{i,j}^p$ como el número de clases que nacen en K_i y mueren entrando a K_j , sin hacer ninguna referencia a independencia entre ellas. Sin embargo, si se toma literal esa definición, que es posible por la finitud de los grupos de homología en cuestión, la ecuación 114 no es verdadera. La razón de que no sea verdadera es que hemos probado su veracidad cuando un requerimiento de independencia adicional se impone, y claramente esto reduce en cantidad al número $\mu_{i,j}^p$ respecto a la interpretación literal de lo que ellos presentan. Un ejemplo concreto para observar este fenómeno aparece en el ejemplo desarrollado al inicio, para la filtración



Aquí puede observarse que, con la interpretación literal, $\mu_{4,7;1}=2$, pues las clases distintas son las representadas por abd y por abd+bcd (obsérvese que estas dos clases no son independientes, en el sentido dado en las notas). Sin embargo, con nuestros cálculos $\mu_{4,7;1}=1$ y, como tanto en el libro como en nuestras notas la definición de $\beta_{i,j;p}$ coincide, no es posible que estén considerando la interpretación literal. Esto muestra que un concepto de independencia es necesario al contabilizar las clases de una generación específica.

Claramente, no estoy afirmando que los autores del libro no son conscientes de la definición correcta de $\mu^p_{i,j}$, simplemente enfatizo que no dan una definición rigurosa en este punto, donde a mi parecer sí debería darse una. La definición que yo doy de $\mu^p_{i,j}$ la obtuve después de bastantes experimentos sobre qué es lo que se buscaba contabilizar. Por otra parte, la demostración del teorema fundamental de la persistencia no aparece en este texto aunque es mencionado allí. Mi objetivo fue demostrar como se deducía tal ecuación a partir de 114. Finalmente, la prueba de 114 que presentó es mía, pero admito que quizá haya alguna más directa.

Creo es importante leer el séptimo capítulo del libro completamente, pues se introducen unos algoritmos para el cálculo de los diagramas de persistencia que no se mencionan en estas notas. También se analiza el problema de la eficiencia cuando se planea programar en una computadora el algoritmo, entre otras cosas relacionadas.

Topology for Computing. Afra J. Zomorodian: Este texto no menciona el teorema fundamental de la persistencia y pasa directamente al estudio de los diagramas de persistencia. Lo

que es fundamental leer de este libro son la sección 6.1 y el capítulo 7. Este último capítulo muestra un algoritmo para calcular diagramas de persistencia ignorando toda la cuestión homológica subyacente, es decir, una vez que se obtienen el complejo simplicial y la filtración asociada se procede a trabajar con ciertas matrices mediante algoritmos de reducción y al final, cual magia negra, puede leerse el diagrama de persistencia. En esta parte juega un papel muy prominente el hecho de que las filtraciones dan una graduación de la homología, la cual se contabiliza mediante polinomios. Es un algoritmo muy interesante cuya prueba es muy ilustradora.

Elementary Applied Topology. Robert Ghrist: Este libro contiene una aplicación clásica de la homología persistente, que de hecho fue el primer trabajo donde se utilizó esta teoría de manera concreta. Recomiendo mucho leer al respecto en las secciones 5.13, 5.14 y 5.15. La primera introduce la noción de persistencia y códigos de barras rápidamente, la segunda habla del espacio de imágenes, mostrando que las superficies de ciertos objetos se acomodan de manera natural en una botella de Klein. La deducción de que están sobre tal superficie es muy ilustradora de las técnicas del tema. Finalmente la última sección habla sobre persistencia zigzag, la cual no hemos discutido aquí pero que es importante. Esta persistencia es mencionada en los dos textos anteriores.

Bibliografía

- [1] John M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics; v.202, Springer. Second edition, 2011
- [2] C.R.F Maunder, Algebraic Topology, Dover Publications. First edition, 1996
- [3] Hajime Sato, Algebraic Topology: An Intuitive Approach, Translations of Mathematical Monographs; v.183, AMS. First edition, 1999
- [4] James W. Vick, *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics; v.53, Springer. Second edition, 1994
- [5] Allen Hatcher, Algebraic Topology, www.math.cornell.edu/~hatcher, 2002
- [6] Robert Ghrist, Elementary Applied Topology, First edition, 2014
- [7] Herbert Edelsbrunner, John Harer, Computational Topology. An Introduction, American Mathematical Society. First edition, 2010
- [8] Afra J. Zomorodian, Topology for Computing, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. First edition, 2005